GABARITO P2

MAT0230–Geometria– Albert Fisher – Prova 2, 29 de novembro de 2018

Geometria. Estamos dados um conjunto X, chamado o *espaço* e tambem o *plano*, cujos elementos são chamados *pontos*, e com certos subconjuntos chamados *retas*, satisfazendo as seguintes axiomas:
As Axiomas de Incendencia:
[**I1**] Dado pontos $A \neq B$, existe uma unica reta l que contem A, B.
[**I2**] Para cada reta l, existe $A, B \in l$ tal que $A \neq B$.
[**I3**] Dado $A \neq B$, existe um terceiro ponto C tal que A, B, C são não-colineares.
As Axiomas de Betweenness: Temos uma relação ternário $A * B * C$ no X. Falamos neste caso que o ponto C *esta no meio* de A e B.
[**B1**] Caso $A * B * C$, então A, B, C são colineares e distintos, e tambem vale $C * B * A$.
[**B2**] Dado $A \neq B$, existe C tal que $A * B * C$.
[**B3**] Dado A, B, C colineares e distintos, exatamente um está no meio.
Definição: Dado $A \neq B$, o *segmento* $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{E : A * E * C\}$.
[**B4**] Dado A, B, C não-colineares, caso uma reta l não contem nenhum dos vertices do triangulo ABC, mas intersecta um lado, então l vai intersectar exatamente um dos demais lados do triangulo.
As Axiomas de Congruencia de Segmentos: Temos uma relação binario entre (dois) segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, escrito $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ satisfazendo:
[**C1**] Dado um segmento $\overline{AB}$, e uma semi-reta s com vertice C, existe um ponto unico $D \in s$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
[**C2**] Congruencia de segmentos é uma relação de equivalencia.
[**C3**] ("Adição") Dado $(A * B * C)$ e $(D * E * F)$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
As Axiomas de Congruencia de Angulos: Temos uma relação binario entre angulos, $\angle BAC$ e $\angle EDF$, escrito $\angle BAC \cong \angle EDF$, satisfazendo:
[**C4**] Dado $\angle BAC$ e uma semireta $\overrightarrow{DF}$, escolhendo um lado da reta $r = r(D, F)$, existe uma unica semireta $\overrightarrow{DE}$, com E neste lado, tal que $\angle BAC \cong \angle FDE$.
[**C5**] Congruencia de angulos é uma relação de equivalencia.
[**C6**] (LAL) (Lado-Angulo-Lado): Dado dois triangulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, e $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Isto é, temos tambem que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

OBS: Na resolução dos problemas, pode-se utilizar qualquer exercisio anterior ao provar um outro (por exemplo, pode-se utilizar 2 *ou* 3*a na prova de* 3*b ou* 4*).*

(1) Assumimos que $A * B * C$ numa reta l e que $A * D * E$ numa reta $\widetilde{l} \neq l$. Mostre que $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ se encontram num unico ponto M. (DICA: $[B4]$!!)

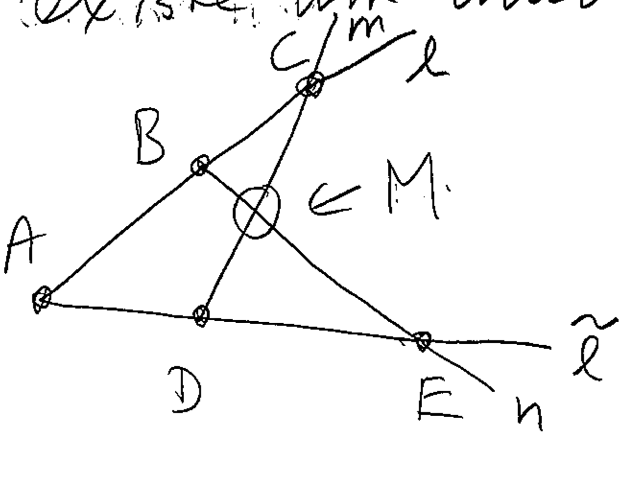
(2a) Apresenta sa definições de angulo $\angle ABC$, e do interior deste angulo.
(2b) Apresenta as definições de angulo suplementar e reto, e triangulo isoceles. Tome cuidado que angulo reto e bem definido.
(3a) Prove: dado $\triangle ABC$ com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então $\angle ABC \cong \angle ACB$.
(3b) Prove: dado $\triangle ABC$ com $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
(4) Prove: Dado um segmento $\overline{AB}$, existe um ponto C tal que $\triangle ABC$ é isoceles.

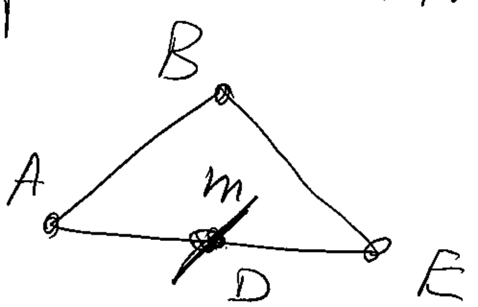
(5)(LLL) Prove: Dado dois triangulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, e $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
(6) Dado pontos $A \neq B$ e um ponto C fora da reta $r = r(A, B)$, prove que existe uma reta l passando por C que é perpendicular ao r. (DICA: pense tambem no lado oposto da reta!)

GABARITO PROVA 2 MAT0230

(1) $A*B*C$ no l, $A*D*F$ no $\tilde{l} \neq l$. Mostre que $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{M\}$ para um ponto M.

Prova. (Veja também solução de Gab. Prova 1 e de exercícios). $l \neq \tilde{l}$ então A, B, E são não-colineares. A reta $m = r(C, D)$ passe pelo lado $\overline{AE}$ do $\triangle ABE$, no (único) ponto D. Afirmo que m não encontra o lado $\overline{AB}$. Mas $m \neq l$, e m e l já se encontram no ponto C. Então caso $m \cap \overline{AB} \neq \emptyset$, $C \in \overline{AB}$, mas $A*B*C$ então $A*C*B$ não é possível (por B3) e $C \neq A, B$ (por B1). Então por B4, m passe pelo lado $\overline{BE}$: existe um único ponto $M \in m \cap \overline{BE}$:





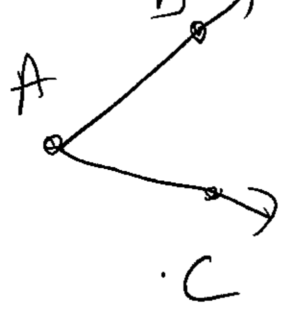
Ainda precisamos verificar que $M \in \overline{BE} \cap \overline{CD}$. Mas pelo mesmo raciocínio, utilizando ΔADC e reta $n = r(B, E)$, sabemo que $\overline{CD} \cap n = \{M_2\}$, um único ponto.

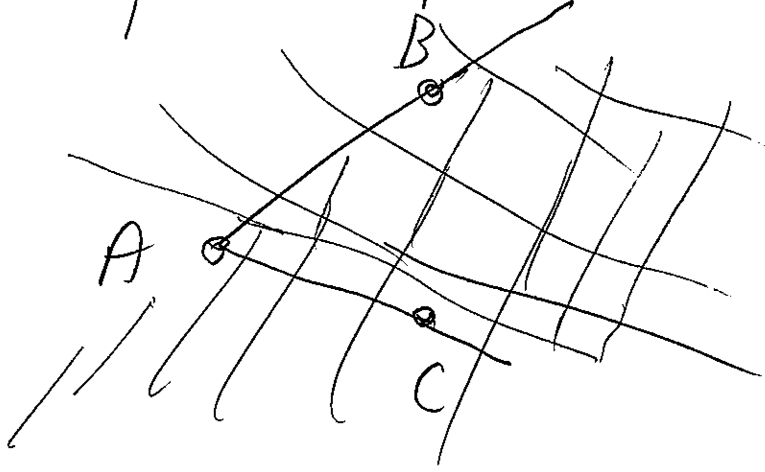
Daí, $M = M_2$ e $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{M\}$. //

(2) Apresenta as definições:

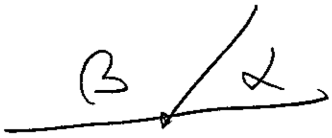
<u>Def de angulo $\angle ABC$</u>: Dado A, B, C não-colineares, $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$, a união das duas semiretas.

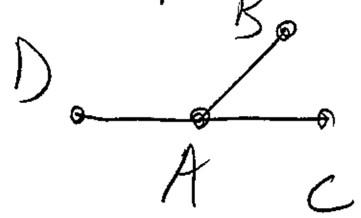
<u>Def interior de $\angle ABC$</u>: é a interseção de 2 semi-planos, o lado da reta $l = r(B, A)$ oposto o ponto C, e o lado da reta $\tilde{l} = r(B, C)$ oposto o ponto A.





Def de angulo suplementar:

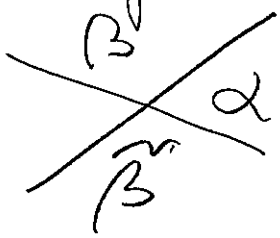




Dado $D * A * C$, $\angle BAC$ e $\angle BAD$ são suplementares.

Def de angulo reto: Um angulo α é reto se $\alpha \cong \beta$ para β um dos angulos suplementares ao β.

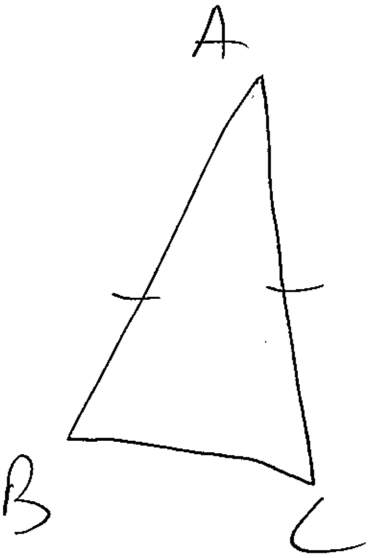
OBS: Cada angulo tem 2 angulos suplementares, mas $\beta \cong \tilde{\beta}$



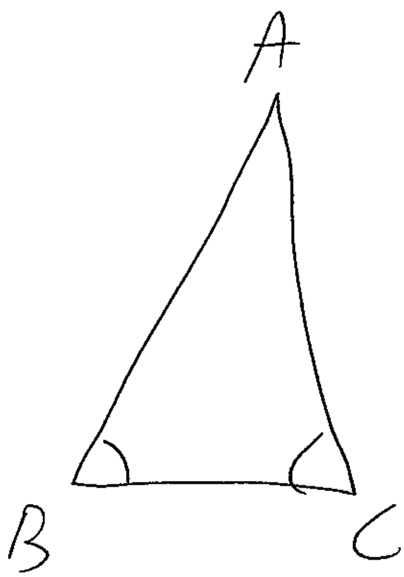
pois eles são OPV, e temos uma Proposição que angulos verticais (OPV) são congruentes. Então se $\alpha \cong \beta$ e $\beta \cong \tilde{\beta}$, $\alpha \cong \tilde{\beta}$ (pela transitividade no C5).

Def: $\triangle ABC$ e isósceles se 2 dos lados são congruentes. (4)

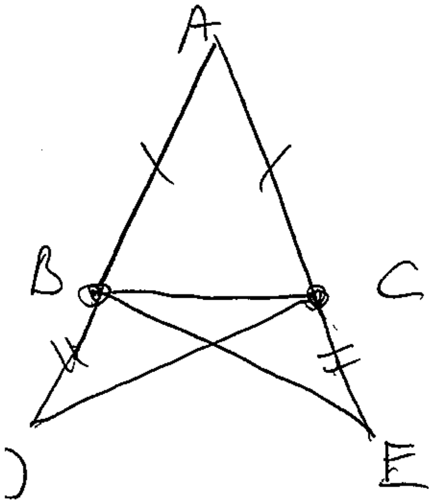
(3a) Prove que, se para $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então $\angle ABC \cong \angle ACB$.



$\Rightarrow$



Prova: Por B2, ∃ F com $A*B*D$.
Por C1, ∃ E na semireta $\overrightarrow{AC}$ com
$\overline{CE} \cong \overline{BD}$:

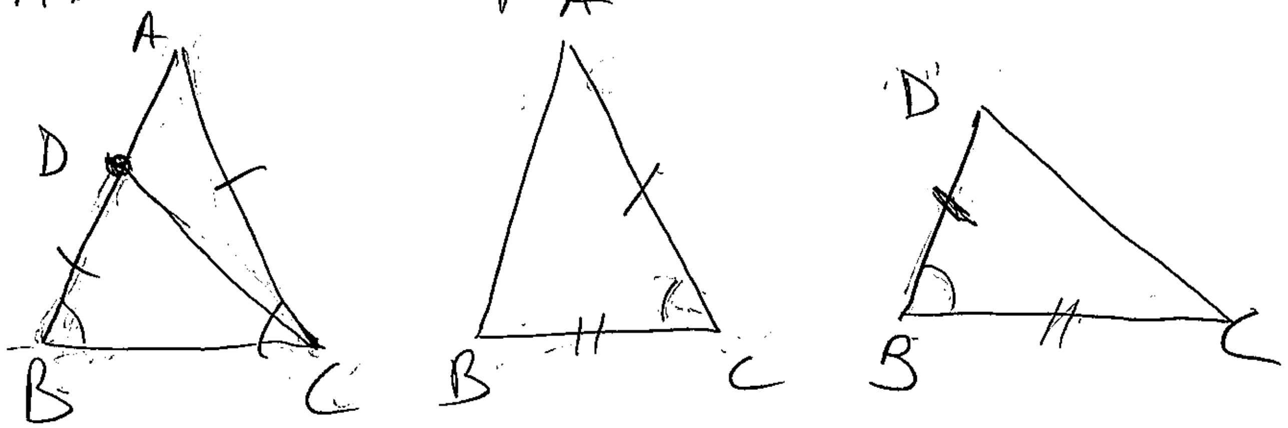


Por adição (C3) temos
$\overline{AD} \cong \overline{AE}$. Utilizamos
LAL (C6) com angulo
na vertice A: então
$\triangle ADC \cong \triangle AEB$.

Daí, $\overline{DC} \cong \overline{BE}$ e $\angle BDC \cong \angle CEB$.
Por LAL, $\triangle BDC \cong \triangle CEB$.
Daí, $\angle DBC \cong \angle ECB$. Os angulos
$\angle ABC$ e $\angle ACB$ são suplementares
a estes, então pela Prop. sobre angulos
suplementares, $\angle ABC \cong \angle ACB$. //

3b (a conversa!) Dado $\triangle ABC$
com $\angle ABC \cong \angle ACB$, então
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$, isto é, $\triangle ABC$ é isosceles.

<u>Prova</u>: Se $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$, um é menor (por tricotomia). Digamos $\overline{AC} < \overline{AB}$. Por C1, $\exists!\, D$ com $A * D * B$ tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$:



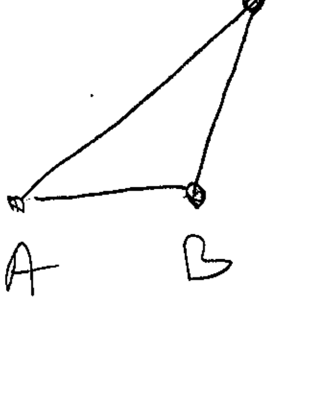
Por LAL, $\Delta ACB \cong \Delta DBC$, pois $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ e $\angle ACB \cong \angle DBC$.

Daí, $\angle DCB \cong \angle ABC \cong \angle ACB$, então $\angle DCB \cong \angle ACB$. Entretanto, $\overrightarrow{DC}$ está no interior do $\angle ACB$, então $(\angle DCB) < (\angle ACB)$, um absurdo. $*$ //

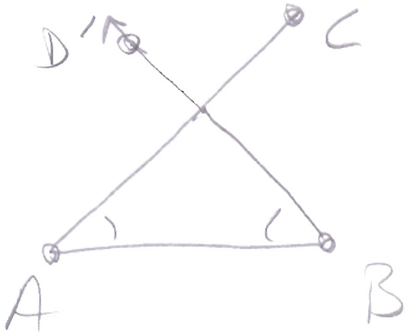
4. (Existência de triângulos isoceles).

Dado um segmento $\overline{AB}$, existe D tal que $\triangle ABD$ é isoceles.

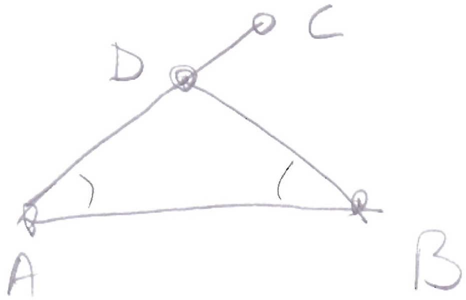
Prova. Por I.3, $\exists$ um ponto C não-colinear com A, B. Se $\angle CAB \cong \angle CBA$, o triângulo é isoceles já.



Caso digamos $\angle CAB < \angle CBA$, (utilizando trichotomia) então existe uma semi reta $\overrightarrow{BD'}$ no interior de $\angle CBA$ com $\angle D'BA \cong \angle CAB$:



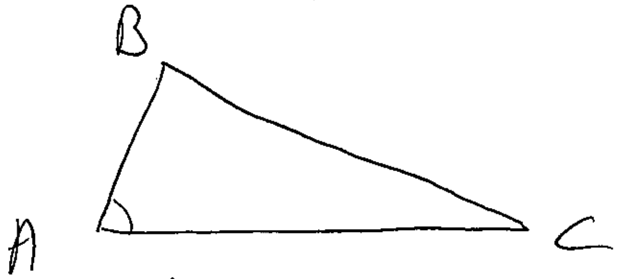
Pela teorema da Barra Cruzada, existe $D \in \overline{AC} \cap \overrightarrow{BD'}$.

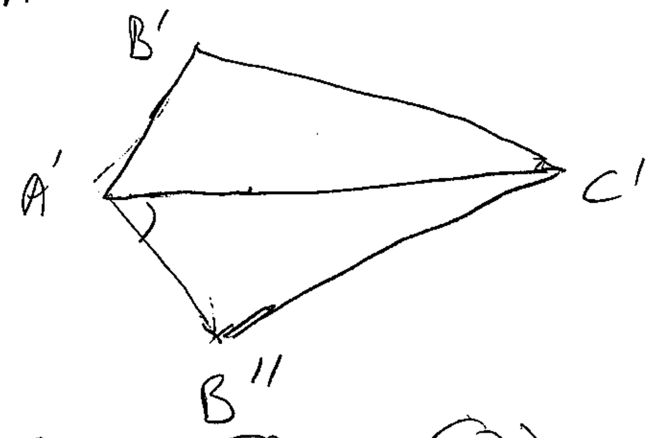


O triângulo ΔABD tem $\angle DAB \cong \angle DBA$, e por o problema anterior, ΔADB é isósceles //

5 (LLL) Dado dois triangulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

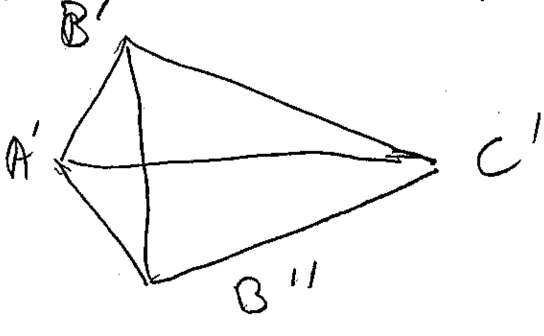
Prova:





Construímos (por C4 e C1) um ponto B'' no lado oposto da reta A'C' tal que $\angle BAC \cong \angle B''A'C'$ e $\overline{A'B''} \cong \overline{AB}$. Desenhamos $\overline{B''C'}$, por I1.

Por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C'$. Desenhamos B'B''.



$\triangle A'B'B''$ é Isoceles!

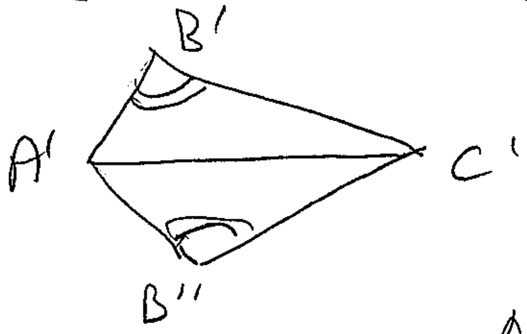
Então pela Prop., $\angle A'B'B'' \cong \angle A'B''B'$.

Tambem, $\Delta B'B''C'$ é isoceles.

Daí, $\angle B''B'C' \cong \angle B'B''C'$.

Pela Prop. de Somatório de Angulos,

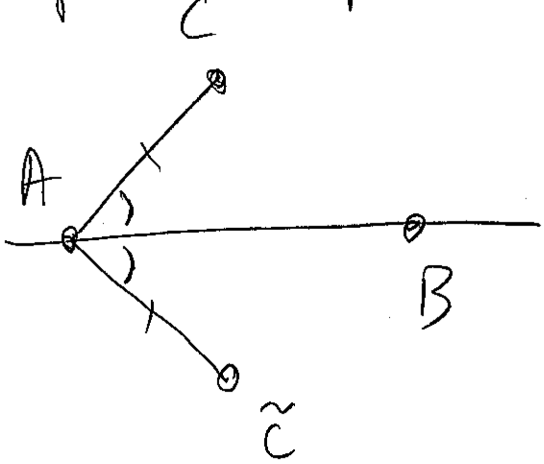
$\angle A'B'C' \cong \angle A'B''C'$.



Por LAL, $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B''C'$ $\cong \Delta ABC$. Por transitividade, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. //

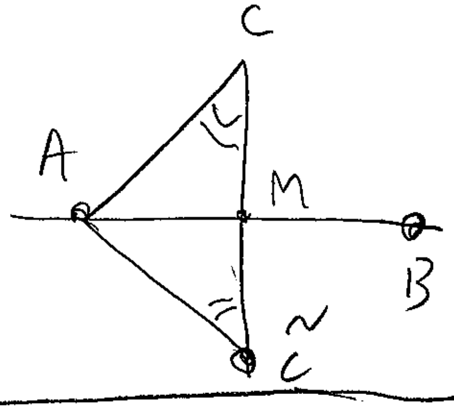
(6) Dado pontos $A \neq B$, e ponto C fora da reta $r = r(A, B)$, prove que existe uma reta l, passando por C, que e perpendicular ao r.

Prova. Por (C4), existe uma (única) semireta $S = \overrightarrow{A\tilde{C}}$ tal que $\tilde{C}$ está no lado oposto da reta r, do C, isto é, $\tilde{C} \not\sim^{r} C$, e com ângulo congruente: $\angle CAB \cong \angle \tilde{C}AB$:



Caso 1: A, C, $\tilde{C}$ são não-colineares.

Então o $\Delta AC\tilde{C}$ é isosceles. Daí, $\angle AC\tilde{C} \cong \angle A\tilde{C}C$.



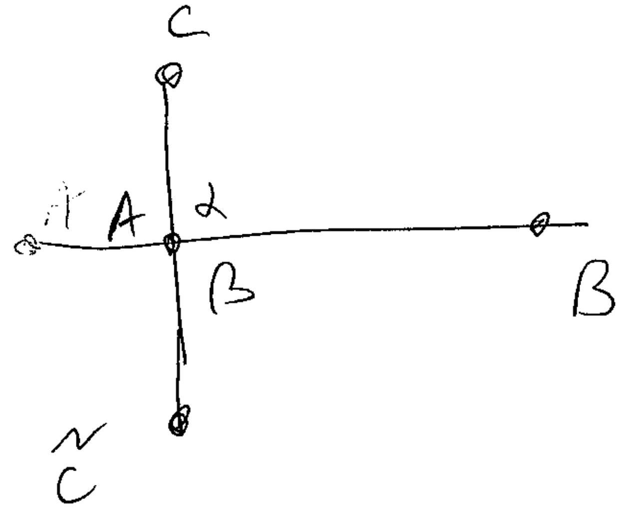
Daí, $\Delta ACM \cong \Delta A\tilde{C}M$ por LAL.

Nota: $\overrightarrow{AB} \cap \overline{C\tilde{C}} = \{M\}$, existe um tal ponto M, pela Teorema da Barra Cruzada.

Daí, chamando $\alpha = \angle CMA$ e $\beta = \angle \tilde{C}MA$,

α e β são suplementares, mais iguais (congruentes) pelo ~~L~~AL, daí as retas são perpendiculares.

Caso 2: A, C, $\tilde{C}$ são colineares.



Daí, $\alpha = \angle CAB$ e $\beta = \angle \tilde{C}AB$ são suplementares, mas pela construção da semireta, $\alpha \cong \beta$. Então é ângulo reto, e $l = \text{reta}(C, \tilde{C})$ é perpendicular ao r. //