MAT0230–Geometria– Albert Fisher – Prova 1, 8 de outubro de 2018

Conjuntos e lógica. P, Q representam frases que podem ser verdadeiras ou falsos, denotado por V, F. Temos os simbolos $\implies$ (implicação); $\sim$ (não); $\wedge$, $\vee$ (e, ou).
Dado um conjunto X lembre-se a definição do complemento de $A \subseteq X$: $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$. No seguinte, vamos assumir que todos os x são elementos do X. Dai, esta definição é mais simples: $A^c = \{x : x \notin A\}$.
(1a) Utilizando tabelas de verdade, mostre que $(P \implies Q) \iff (\sim Q \implies \sim P)$.
(1b) Utilizando parte (a), mostre que para $A, B \subseteq X$ vale: $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

Geometria. Estamos dados um conjunto X, chamado o *espaço* e tambem o *plano*, cujos elementos são chamados *pontos*, e com certos subconjuntos chamados *retas*, satisfazendo as seguintes axiomas:
As Axiomas de Incendencia:
[**I1**] Dado pontos $A \neq B$, existe uma unica reta l que contem A, B.
[**I2**] Para cada reta l, existe $A, B \in l$ tal que $A \neq B$.
[**I3**] Dado $A \neq B$, existe um terceiro ponto C tal que A, B, C são não-colineares.
As Axiomas de Betweenness: Temos uma relação ternário $A * B * C$ no X. Falamos neste caso que o ponto C *esta no meio* de A e B.
[**B1**] Caso $A * B * C$, então A, B, C são colineares e distintos, e tambem vale $C * B * A$.
[**B2**] Dado $A \neq B$, existe C tal que $A * B * C$.
[**B3**] Dado A, B, C colineares e distintos, exatamente um está no meio.
Definição: Dado $A \neq B$, o *segmento* $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{E : A * E * C\}$.
[**B4**] Dado A, B, C não-colineares, caso uma reta l não contem nenhum dos vertices do triangulo ABC, mas intersecta um lado, então l vai intersectar exatamente um dos demais lados do triangulo.
As Axiomas de Congruencia: Temos uma relação $\cong$ de *congruencia* entre segmentos, satisfazendo:
[**C1**] Dado um segmento $\overline{AB}$, e uma semi-reta s com vertice C, existe um ponto unico $D \in s$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
[**C2**] Congruencia é uma relação de equivalencia.
[**C3**] ("Adição") Dado $(A * B * C)$ e $(D * E * F)$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

(2a) Temos as teoremas de Separação do Plano (sobre a separação de nosso plano X para uma reta, l) e de Separação da Reta (sobre a separação de uma reta l por um ponto C). Ambos falem algo sobre uma relação de equivalencia. Qual é a definição desta relação, e quais são os anunciados destas teoremas?
(2b) Prova que: Se vale $A * C * B$ e $A * E * C$, então vale $E * C * B$.
(2c) Dado $A * C * B$, mostre que $\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$.

(3) Assumimos que $A * B * C$ numa reta l e que $A * D * E$ numa reta $\widetilde{l} \neq l$. Mostre que $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ se encontram num unico ponto M. (DICA: $[B4]$!!)

(4a) Apresenta sa definições de angulo $\angle ABC$, e do interior deste angulo.

(4b) Dado dois segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, define $\overline{AB}+\overline{CD}$. Explica com uma figura a diferencą entre $\overline{AB}+\overline{CD}$, $\overline{BA}+\overline{CD}$ e $\overline{CD}+\overline{AB}$. Eles são iguais? Congruentes? (Uma prova detalhado não é necessario).

1

(1a)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim Q \Rightarrow \sim P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \Rightarrow \sim P)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

então $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \Rightarrow \sim P)$ e sempre verdadeira, é uma tautologia, provando (1a).

(1b) $A \subseteq B \overset{?}{\Leftrightarrow} B^c \subseteq A^c$

$$\Updownarrow$$

$(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$

$P \Rightarrow Q$

$$\Updownarrow$$

$\sim Q \Rightarrow \sim P$

$$\Updownarrow$$

$\sim(x \in B) \Rightarrow \sim(x \in A)$

$$\Updownarrow$$

$(x \in B^c) \Rightarrow (x \in A^c)$

$x \notin B \qquad x \notin A$

$(x \notin B) \Rightarrow (x \notin A)$

✓

(2a). Dado $l \subseteq X$, definamos uma relação no $X \setminus l$: $A \overset{l}{\sim} B \iff l \cap \overline{AB} = \emptyset$.

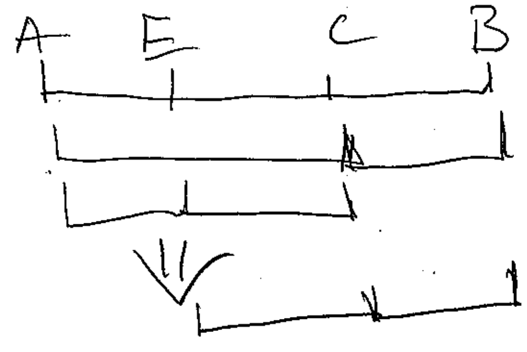
Dado l e um ponto $C \in l$, definamos no $l \setminus \{C\}$ a relação $A \sim B \iff C \notin \overline{AB}$.

Sep. do Plano: $X \setminus l = S_1 \cup S_2$ com S_1, S_2 não-vazios, tal que $A, B \in S_i \iff A \overset{l}{\sim} B$.

Sep. da Reta: $l \setminus \{C\} = S_1 \cup S_2$ não-vazios, tal que $A, B \in S_i \iff A \overset{C}{\sim} B$.

$\boxed{\text{Equivalente, os teoremas falem que } \sim \text{ é uma relação de equivalência com 2 classes.}}$

(2b) $(A * C * B) \wedge (A * E * C) \overset{?}{\Longrightarrow} E * C * B$



Prova:

$A * C * B \iff C \in \overline{AB}$ e $C \neq A, B$,

$\iff A \overset{C}{\nsim} B$. Pois, por $\boxed{B1}$, A, C, B são pontos distintos, e pela def. de segmento, $\overline{AB} = \{E : A * E * B\} \cup \{A, B\}$, (2b) <u>Continuação</u>. Afirmamos que

$A * E * C \Rightarrow A \overset{C}{\sim} E$. Pois

$A \overset{C}{\nsim} E \Leftrightarrow (C \in \overline{AE}$ e $C \neq A, E)$,

$\Leftrightarrow A * C * E$ mas por $\boxed{B3}$ não

pode ter $A * E * C$ e $A * C * E$.

Daí, Sabemos $(A \overset{C}{\nsim} B) \wedge (A \overset{C}{\sim} E) \Rightarrow E \overset{C}{\nsim} B$

$\Leftrightarrow E * C * B$.

(pela transitividade, pois se $E \overset{C}{\sim} B$,

então $(E \overset{C}{\sim} B) \wedge (A \overset{C}{\sim} E) \Rightarrow (A \overset{C}{\sim} B)$, uma

contradição.)

Utilizamos aqui o fato que

os teoremas de Sep. do Plano e Reta

falem (equivalentamente) que $\overset{\ell}{\sim}$ e $\overset{S}{\sim}$

são relações de equivalencia com

duas classes de equivalencia, S_1 e S_2.

2c) Dado $A*C*B$, então $\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$.

<u>Prova</u>: por def., $\overline{AC} = \{A, C\} \cup \{E : A*E*C\}$

$\overline{CB} = \{C, B\} \cup \{F : C*F*B\}$

então $C \in \overline{AC} \cap \overline{CB}$, isto é, $\{C\} \subseteq \overline{AC} \cap \overline{CB}$

Precisamos provar que $\overline{AC} \cap \overline{CB} \subseteq \{C\}$,

isto é, se $E \in \overline{AC}$ e $E \in \overline{CB}$ então $E = C$.

<u>Caso $E \neq C$</u>, então $E \notin \{A, C\}$ e $E \notin \{C, B\}$

(pois $A \neq B$). Daí $(A*E*C) \wedge (A*C*B)$

Mas de parte (2b), $\Rightarrow$ <u>$E*C*B$</u>.

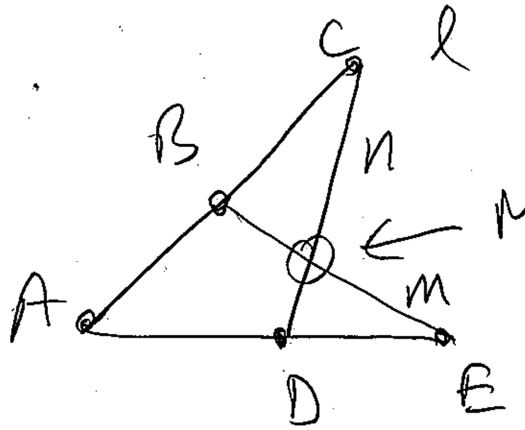
Entretanto, $E \in \overline{CB} \Rightarrow$ (mesma lógica)

que <u>$C*E*B$</u>. Mas isto

contradiz o $\boxed{B3}$. (Só pode ter um

no meio).

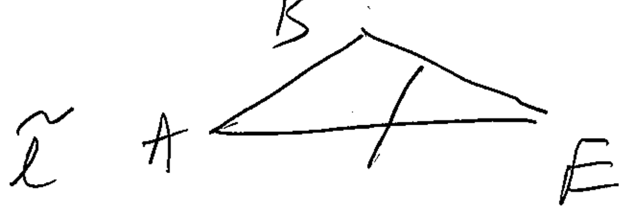
3)



+ 1/2 design

- 1/4 m ∈ line.

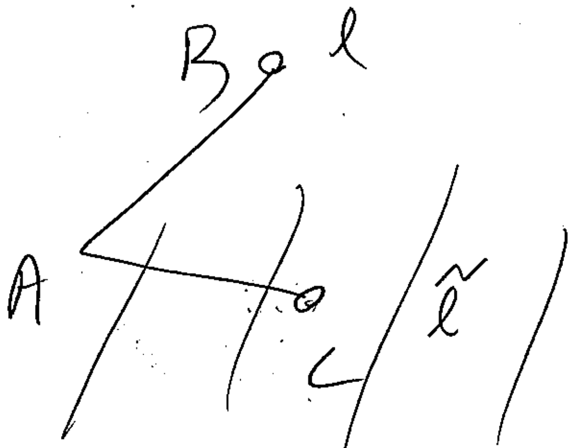
5



<u>Prova</u>: ℓ e $\tilde{\ell}$ são distintos, então A, B, E são não-colineares. Considere $\triangle ABE$. Daí, ℓ passe por $\overline{AE}$ (pois $\ell \cap \overline{AE} = \{D\}$). ℓ não pode encontrar $\overline{AB}$ (pois ℓ encontra a reta AB em um ponto já, o ponto C). Daí, por $\boxed{B4}$, tem que passar por $\overline{BE}$. Isto é, $M \in \overline{BE} \cap \ell$ existe. Afirmamos que $M \in \overline{CD}$. Mas, pela mesma lógica, utilizando $\triangle ACD$, $m \cap \overline{CD} = \{N\}$, então $M, N \in m \cap n$, mas eles

não podem se encontrar em 2 pontos,
então $M = N$ e $M \in \overline{BE} \cap \overline{CD}$ //. 6

4a $\angle ABC$: dado 3 pontos não-colineares $\angle ABC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$, onde $\overrightarrow{AB}$ é a semi-reta com vértice A, no mesmo lado do ponto B. (Utilizando a separação da reta pelo ponto A). O <u>Interior</u> $Int(\angle ABC)$ é a interseção de dois semi-planos: o lado

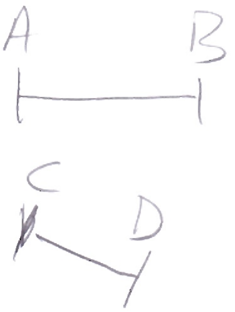


da reta $l = reta(AB)$ equivalente ao ponto C, e o lado da reta $\tilde{l} = reta(AC)$ equivalente ao B.

4b. $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE}$ onde

E é (por $\boxed{C1}$) a única ponto na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ tal que

$\overline{BE} \cong \overline{CD}$.



$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE}$;

$\overline{BA} + \overline{CD} = \overline{BE'} = \overline{E'B}$

$\overline{CD} + \overline{AB} = \overline{CF}$

onde $\overline{DF} \cong \overline{AB}$.

então:

" Eles não são iguais, mas são todos congruentes. (Pois, provamos que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'} \Rightarrow \overline{AB}+\overline{CD} \cong \overline{A'B'}+\overline{C'D'}$,

e também por exercício 8b:

$$\overline{AB}+\overline{CD} \cong \overline{CD}+\overline{AB},$$