A. FISHER
2/19/2018

Conteudo das notas:

I. Intro: sistemas axiomaticas; motivação e exemplos: espaço vetorial; a ideia de modelo (um exemplo de uma sistema de axiomas). pp 1-9.

pp 10-15: As axiomas de Incidencia I1, 2, 3; P, P'

II Teoria dos Conjuntos: introdução; Lógica (tabela de verdade)
O Paradoxo do Russel; as Axiomas Z-F (cuidado: é uma lista parcial!) (pp 1-11).

III As axiomas do "Betweenness" B1 - B4. Separação do Plano: Anunciado, inicio da prova pp 1-4.

IV. Separação do Plano: detalhes da prova. pp 1-7

V Separação da reta; semi-reta; Teorema da Barra Cruzada pp 1-8

REFERENCIA: o livro do HARTSHORNE, veja HartsCap2.pdf no site.

· <u>Prova</u> (Separação do plano).

<u>Déf:</u> $(A \sim B) \iff (A = B$ ou $\overline{AB} \cap l = \emptyset)$.

(esqueci de incluir a possibilidade "$A = B$" acima!).

Prova que é uma relação de equivalência:

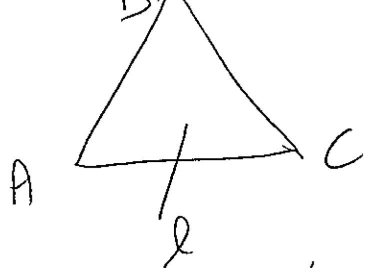
(i) $A \sim A$: pela 1ª parte da def. acima.

(ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$: pois $\overline{AB} = \overline{BA}$.

(iii) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$

<u>Caso 1</u>: A, B, C são não-colineares,

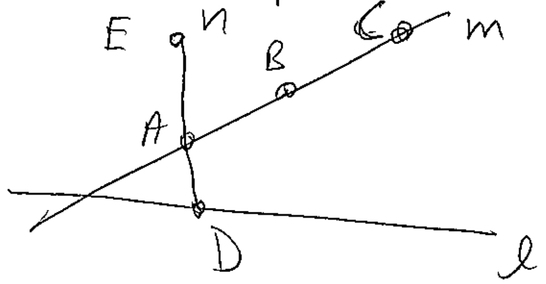
<u>prova por contradição</u>: assumimos que $A \nsim C$. Para $\boxed{B4}$, se l encontra o lado $\overline{AC}$, tem que encontrar ou $\overline{AB}$ ou $\overline{BC}$. Qualquer um deles contradiz a parte inicial: $(A \sim B) \wedge (B \sim C)$, provando (iii).



<u>Caso 2</u>: A, B, C são distintos e colineares, fazendo parte de uma reta m.

Agora a relação esta definido no $X \setminus l$, então $A, B, C \notin l$. Então $l \neq m$.

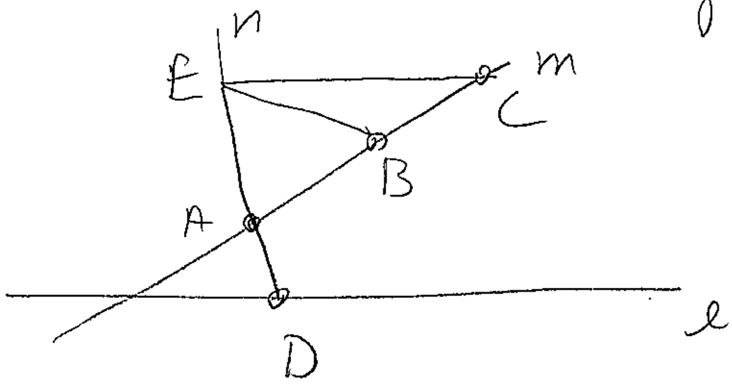
Caso $m \cap l = \emptyset$, então $\overline{AC} \cap l = \emptyset$, e (iii) e verdade. Então consideramos o caso sobrando, que $l \cap m$ é um ponto (não pode ser 2, por $\boxed{I1}$). A prova vai ser direito (não por contradição). Aí dado $(A \sim B)$ e $(B \sim C)$ temos que mostrar que $(A \sim C)$. Existe o ponto de interseção de m e l, e por $\boxed{I2}$ existe pelo menos mais um ponto, D.



Por $\boxed{B2}$ $\exists\, E : D * A * E$. Observe-se que $E \notin l$ (pois $D \in l$, e se $E \in l$, então $n = l$, então $A \in l$, que implica $m = l$ que é impossível.)

Com isto sabemos que n, m, l são retas distintas, então E, A, B, E, B, C, A, E, C são todos não-colineares.

Desenhamos estes triangulos:



Afirmamos que $\overline{EA} \cap l = \emptyset$: l e n tem somente um ponto em comum, então a única possibilidade seria $D \in \overline{AE}$. Mas isto ia implicar que $A * D * E$ (veja a definição do segmento $\overline{AE}$) mas B3 falé que apenas um ponto pode estar no meio (e já temos $D * A * E$).

Isto implica que $E \sim A$. Temos tambem (por hipotese) que $A \sim B$, A, B, E são não-colineares, daí por <u>Caso 1</u> temos transitividade, e $(A \sim B) \wedge (E \sim A) \Rightarrow (B \sim E)$. Tambem, $(B \sim E) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (E \sim C)$. Finalmente, $(E \sim C) \wedge (A \sim E) \Rightarrow (C \sim E)$. //

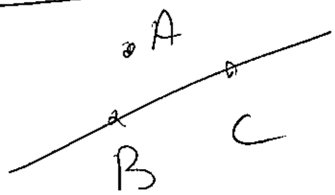
Então mostramos que $A \sim B$ é uma relação de equivalência no conjunto $X \setminus l$,

<u>Def.</u> A <u>classe de equivalência</u> que contém o ponto A é $\{B : B \sim A\}$.

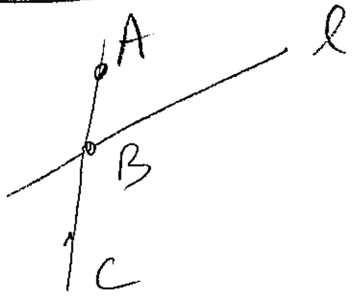
Observe-se que 2 classes de equivalência são iguais ou desjuntas (Verifique isto!!) (<u>exercício.</u>)

Afirmamos que existem 2 classes de equivalência, S_1 e S_2, os "dois lados" da reta l.

<u>Passo 1</u>: <u>Existe ≥ 1 classe</u>: $\exists$ 2 ptos B, C no l (I2) e $\exists$ um terceiro ponto A, não-colinear. Daí existe $A \in X \setminus l$. E temos a classe de equivalência que contém A, (que não é vazio pois $A \sim A$.)



<u>Existe ≥ 2 classes</u>: $\exists$ A fora do l; $\exists$ um ponto $B \in l$; $\exists$ um ponto C com $A * B * C$ ($\boxed{B2}$). Daí temos também a classe de C,



mas $A \not\sim C$ pois $\overline{AC} \cap l = \{B\}$,

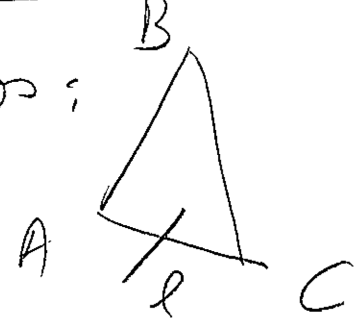
<u>Não existe 3 classes:</u>

Para isto, vamos mostrar que

$(A \not\sim B) \wedge (B \not\sim C) \Rightarrow (A \sim C)$

<u>Caso 1</u>: A, B, C são não-colineares.

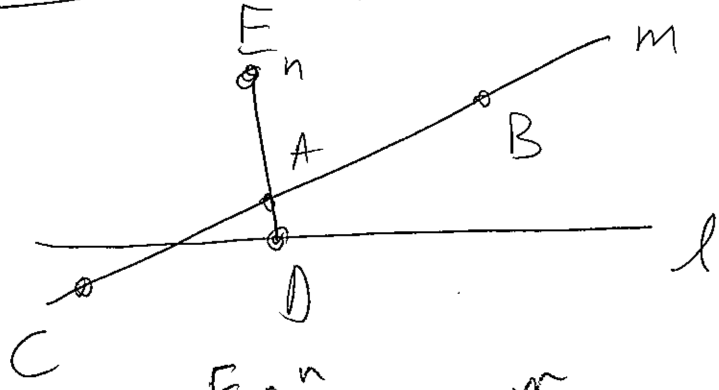
<u>Prova por contradição</u>: Caso $A \not\sim C$, temos:



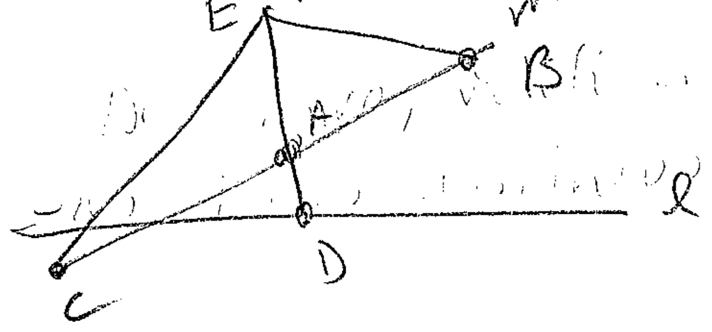
Por $\boxed{B4}$, l também encontra ou $\overline{AB}$ ou $\overline{BC}$ mas <u>não</u> <u>ambos</u>.

Se por exemplo $\overline{AB} \cap l = \emptyset$, aí $(A \sim B)$ que contradiz o hipótese. //

<u>Caso 2</u>: A, B, C são colineares:



Prova por contradição, assumimos $(A \not\sim C)$. De novo, observe-se que l, m, n são retas distintas!



IV (Sep do plano)

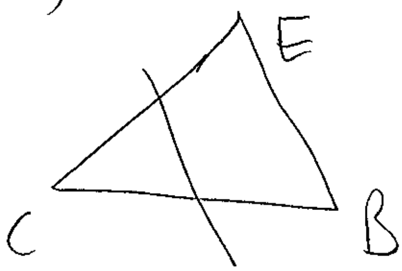
Isto implica que CEB, EAB, CEA são todos não-colineares, isto é, temos estes 3 triangulos.

Afirmo: $C \nsim E$. Sabemos $E \sim A$, e por transitividade, caso $C \sim E$, daria uma contradição (que $C \sim A$).

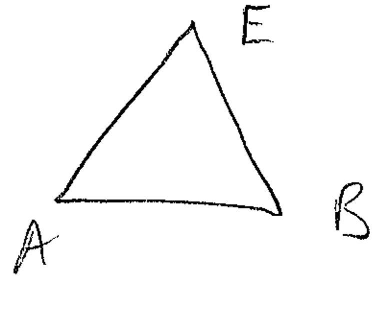
Afirmo: $B \sim E$. Prova: Sabemos $C \nsim E$.

Sabembos tambem $B \nsim C$ (pois se não, contradiz a hipotese $(A \nsim B) \wedge (B \nsim C)$, terminando a prova.)

Ai, $C \nsim E \wedge B \nsim C \Rightarrow E \sim B$ (por transitividade, como acima).



Agora: $A \sim E \wedge E \sim B \Rightarrow A \sim B$, dando uma contradicão ao hipotese, terminando a prova. //



IV (Sep. do plano) 7

OBS: É importante observar que a afirmação ($B * C$) vem da hipotese, e não da geometria da diagrama, onde $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ então o fato que $A * C \Rightarrow B * C$. Pois esta ordem na reta não é necessariamente válida, e a prova deve funcionar somente utilizando os passos dados, e não a diagrama, que é apenas ali para nos ajudar. Sabemos que C, A, B são colineares, sabemos que $A * C$ e que $D * A * E$, mas não sabemos que o ponto A esta no meio do C e B!! Poderemos desenhar todas as possibilidades, mas ia complicar a prova, e não é necessario!!

V Separação de uma reta por um ponto.

Dado uma geometria satisfazendo as axiomas I1,2,3 e B1-4, no espaço X, e uma reta ℓ, com um ponto $A \in \ell$.

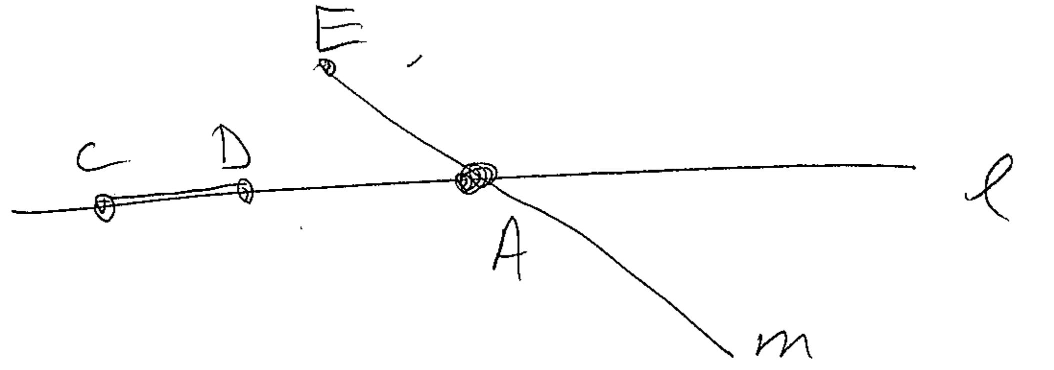
<u>Prop</u>: $\ell \setminus \{A\} = S_1' \cup S_2'$, os <u>dois lados</u> do A, com $S_1', S_2' \neq \emptyset$ e $S_1' \cup S_2' = \ell \setminus \{A\}$, tal que $C, D \in S_i$ sse $A \notin \overline{CD}$.

<u>Prova</u>: Definamos uma relação $\sim$ no conjunto $\ell \setminus \{A\}$ por $C \sim D \iff \overline{CD}$ não contem A. Queremos que isto é uma relação de equivalencia, com S_i não-vazio.

Mas já temos feito todo o trabalho no resultado anterior: $\exists$ um ponto E não no ℓ (por I2, I3). Considere a reta m determinado por E e A.

V

②



Aí m separa o plano em S_1 e S_2, os dois lados do m; definamos

$S_i' = S_i \cap l$, para $i = 1, 2$.

Observe-se que para C, D distintos no l, $\overline{CD}$ contem $A \Longleftrightarrow \overline{CD}$ encontre m. Daí, para pontos no l, ~~as~~ dois relações são iguais. Segue-se que isto é uma relação de equivalencia. Definindo $S_i' = S_i \cap l$, temos $S_1' \cup S_2' = l \setminus \{A\}$. A unica coisa a verificar é que S_1', S_2' são não-vazios. Mas $\boxed{I2} \Rightarrow \exists$ um segundo ponto $C \neq A$ no l, e $B2 \Rightarrow \exists F$ com $C * A * F$. Daí $C \not* F$ e temos $S_1', S_2' \neq \emptyset$. //

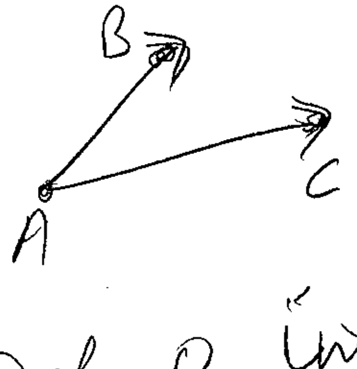
Def: Dado uma reta l e pontos $A \neq D$ no l, a *semi-reta* $\overrightarrow{AD}$ é: todos os pontos no mesmo lado da reta separado por A, que o ponto D, mais A:

$$= \{A\} \cup \{C \in l : C \overset{A}{\sim} D\}.$$

(escrevemos aqui $\overset{A}{\sim}$ para a relação definido pelos lados do A).

Def: $\angle CAB$, um *ângulo*, definido por C, A, B não-colineares, é

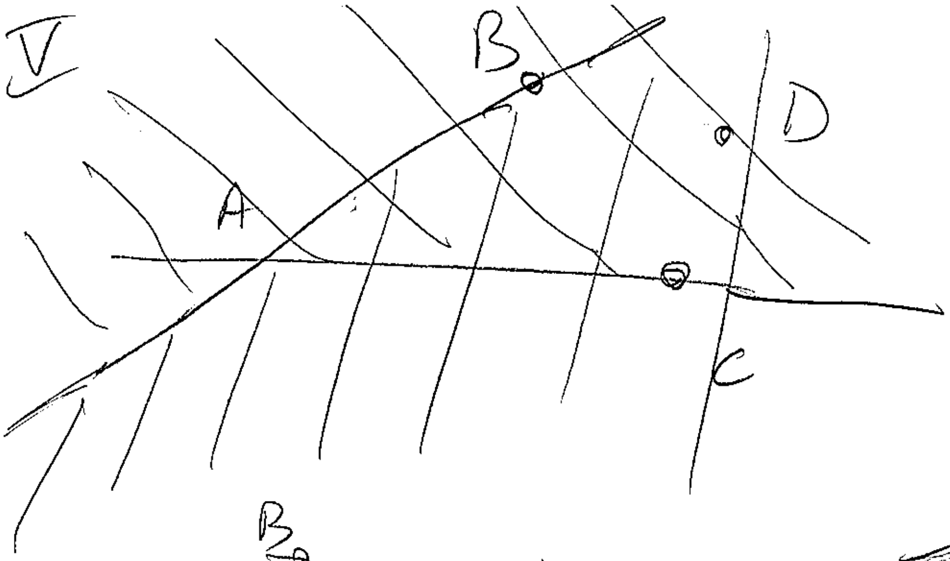
$$\angle CAB = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}.$$

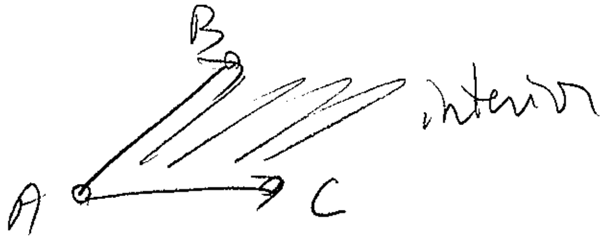


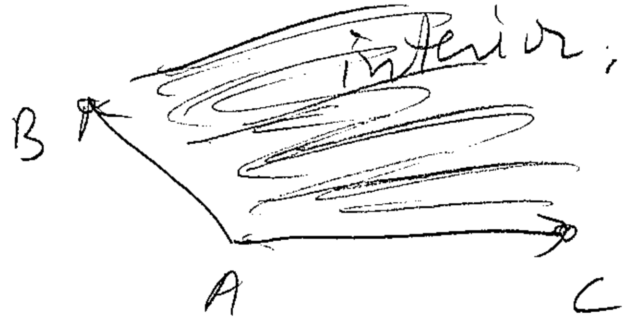
OBS: "ângulos de 0 ou 180°" são excluídos aqui pois A, B, C são não-colineares.

Def. O *interior* do $\angle CAB$ é
$\{D : D$ está no mesmo lado da reta $l(AB)$ quanto C, e do mesmo lado do $l(AC)$ quanto B.$\}$

V

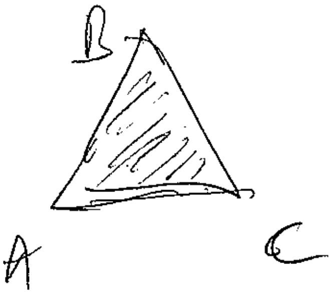


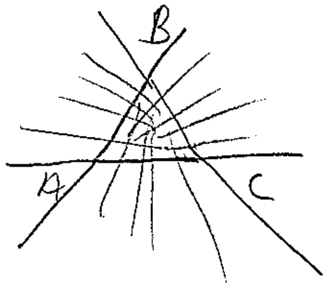




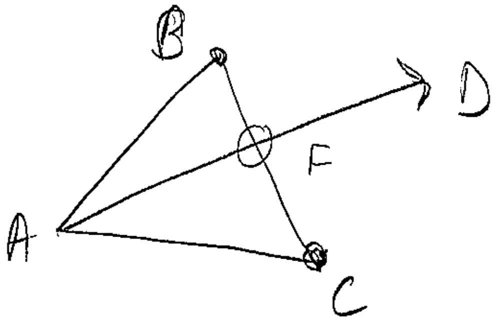
Def: Dado um triângulo ΔABC, o interior do triângulo é:

$int(\angle CAB) \cap int(ACB) \cap int(CBA)$.



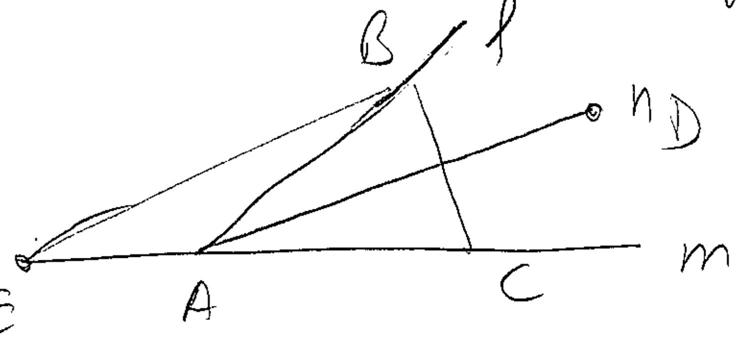


Teorema da Barra Cruzada: Dado um ponto D no $int(\angle CAB)$, a semi-reta $\overrightarrow{AD}$ encontra o segmento $\overline{AB}$ num ponto F.



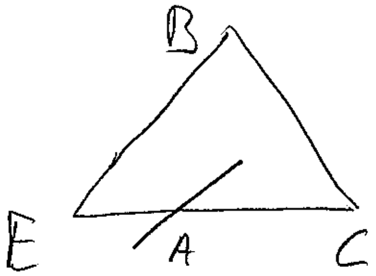
V

Prova: $\exists$ E tal que $E * A * C$;



Observe: l, n, m são retas distintas.

Considere $\triangle EBC$. Sabemos n encontra $\overline{EC}$ no A.



Se conseguimos mostrar que $n \cap \overline{EB} = \emptyset$, então por $\boxed{B4}$ temos que n encontra $\overline{BC}$. (Não termine a prova: n tem dois lados, um $\overrightarrow{AD}$, e queremos depois verificar que de ~~fato~~ $\overrightarrow{AD}$ encontre BC!)

Agora $\exists\ \tilde{D}$ com $\tilde{D} * A * D$, e $n = \overrightarrow{AD} \cup \overrightarrow{A\tilde{D}}$ (isto é, a semi-reta oposta). Olhando para a separação do n para A, equivalentemente pela reta m, sabemos que D

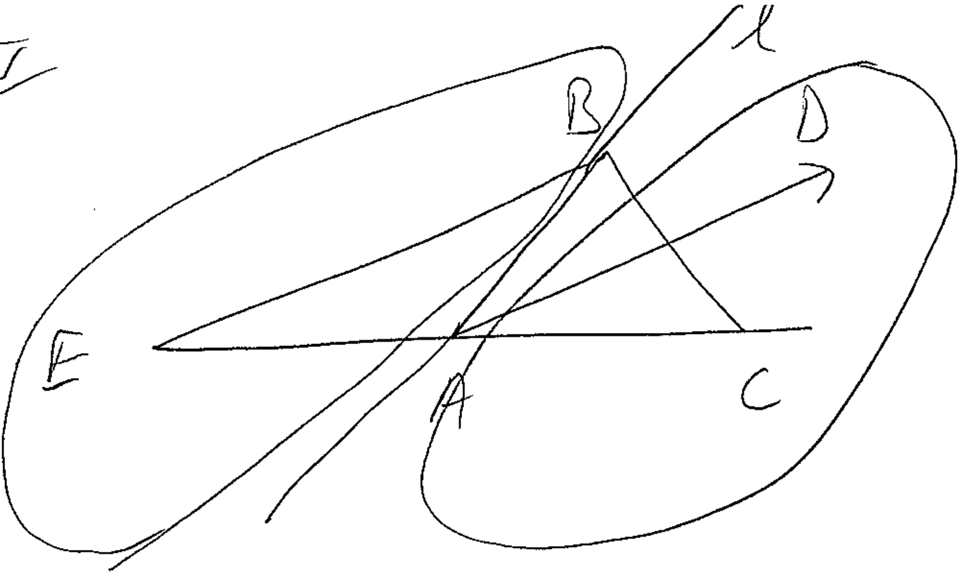
esta no mesmo lado do m que B, pois está no interior do $\angle BAC$, e que F está $n \cap \overline{BC}$ está no mesmo lado do m que B, pois $\overline{BC} \cap m = \{C\}$. Então F, D estão no mesmo lado do m, e sendo que $F, D \in n$, eles estão no mesmo lado do A no n. Mas este lado é $\overrightarrow{AD}$, então $F \in \overrightarrow{AD}$.

Basta então mostrar que n encontra $\overline{BC}$, e para isto (como já dito) basta mostrar que $n \cap \overline{EB} = \phi$.

Agora $\overline{EB} \cap l = \{B\}$, Então cada ponto no $\overline{EB} \setminus \{B\}$ está no mesmo lado do l, o lado oposto do C (pois $E * A * C$ $\therefore$ a reta $l(EC)$ está separado para A equivalente para l).

V

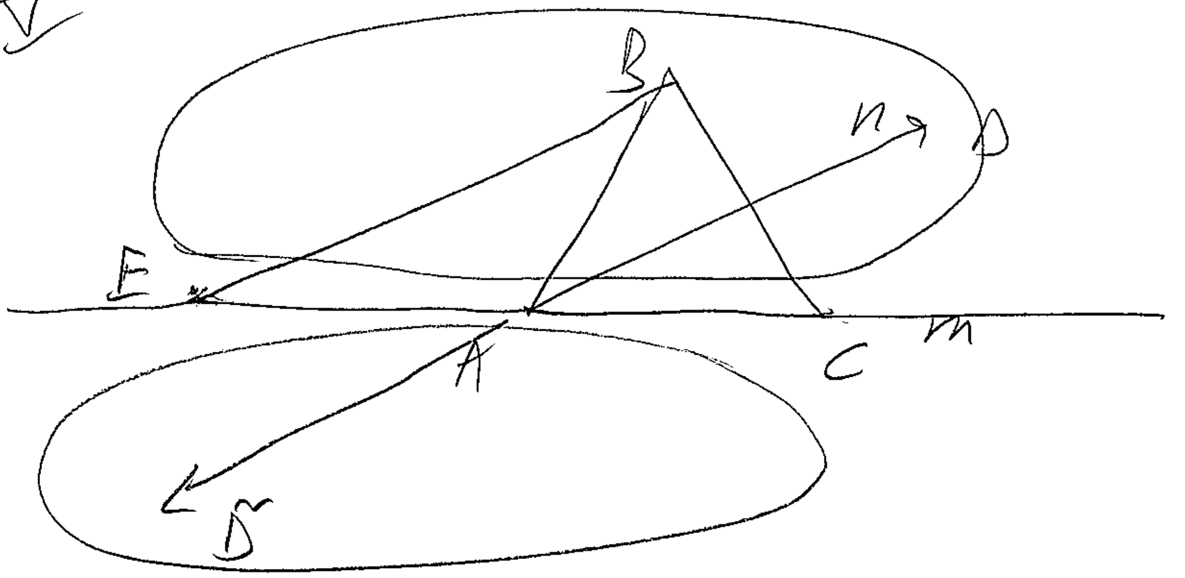
(7)



Sep. por l

D esta no mesmo lado do l que C (pois $D \in \text{int}(\angle BAC)$). Isto valé para todo $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$. Então $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$ e $\overline{EB} \setminus \{B\}$ estão nos lado opostos do l (veja diagrama.) Entao $\overline{EB} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$ (Pois $B \neq A$, e $S_1^l \cap S_2^l = \emptyset$.) Consideramos o raio oposto, $\overrightarrow{A\tilde{D}}$, afirmando que $\overline{EB} \cap \overrightarrow{A\tilde{D}} = \emptyset$ tambem; juntando estes, vamos ter que $\overline{EB} \cap r = \emptyset$, terminando a prova.

Prova que $\overline{EB} \cap \overrightarrow{A\tilde{D}} = \emptyset$: Agora considerando os lados do m, veja figura abaixo,



D está no mesmo lado do m que B, então que $\overline{EB} \setminus \{E\}$, e pois $\tilde{D} * A * D$, D está no lado oposto do $\tilde{D}$ no n separado por A, então do plano separado por m, é o mesmo valé para $\overrightarrow{A\tilde{D}} \setminus \{A\}$. Daí

$$\overrightarrow{A\tilde{D}} \cap \overline{EB} = \emptyset .$$

//