MAT0230–Geometria– Albert Fisher – Prova SUB, 6 de dezembro de 2018

Geometria. Estamos dados um conjunto X, chamado o *espaço* e tambem o *plano*, cujos elementos são chamados *pontos*, e com certos subconjuntos chamados *retas*, satisfazendo as seguintes axiomas:

As Axiomas de Incendencia:

[**I1**] Dado pontos $A \neq B$, existe uma unica reta l que contem A, B.

[**I2**] Para cada reta l, existe $A, B \in l$ tal que $A \neq B$.

[**I3**] Dado $A \neq B$, existe um terceiro ponto C tal que A, B, C são não-colineares.

As Axiomas de Betweenness: Temos uma relação ternário $A * B * C$ no X. Falamos neste caso que o ponto B *esta no meio* de A e C.

[**B1**] Caso $A * B * C$, então A, B, C são colineares e distintos, e tambem vale $C * B * A$.

[**B2**] Dado $A \neq B$, existe C tal que $A * B * C$.

[**B3**] Dado A, B, C colineares e distintos, exatamente um está no meio.

Definição: Dado $A \neq B$, o *segmento* $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{E : A * E * C\}$.

[**B4**] Dado A, B, C não-colineares, caso uma reta l não contem nenhum dos vertices do triângulo ABC, mas intersecta um lado, então l vai intersectar exatamente um dos demais lados do triângulo.

As Axiomas de Congruencia de Segmentos: Temos uma relação binario entre (dois) segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, escrito $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ satisfazendo:

[**C1**] Dado um segmento $\overline{AB}$, e uma semi-reta s com vertice C, existe um ponto unico $D \in s$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

[**C2**] Congruencia de segmentos é uma relação de equivalencia.

[**C3**] ("Adição") Dado $(A * B * C)$ e $(D * E * F)$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

As Axiomas de Congruencia de Ângulos: Temos uma relação binario entre ângulos, $\angle BAC$ e $\angle EDF$, escrito $\angle BAC \cong \angle EDF$, satisfazendo:

[**C4**] Dado $\angle BAC$ e uma semireta $\overrightarrow{DF}$, escolhendo um lado da reta $r = r(D, F)$, existe uma unica semireta $\overrightarrow{DE}$, com E neste lado, tal que $\angle BAC \cong \angle FDE$.

[**C5**] Congruencia de ângulos é uma relação de equivalencia.

[**C6**] (LAL) (Lado-Ângulo-Lado): Dado dois triângulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, e $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Isto é, temos tambem que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

OBS: Na resolução dos problemas, pode-se utilizar qualquer exercisio anterior ao provar um outro (por exemplo, pode-se utilizar 2 *ou* 3a *na prova de* 3b *ou* 4a*).*

(1a) Temos a ideia da separação do da reta l por um ponto C. Isto fale sobre uma relação de equivalencia, $A \overset{C}{\sim} B$. Apresentar a definição desta relação. Utilzando esta definição, apresentar o anunciado da Teorema da Separação do da Reta.

(1b) Prove: Se vale $A * B * C$ e $B * C * D$, então vale $A * B * D$.

(2) Assumimos que $A * B * C$ numa reta l e que $A * D * E$ numa reta $\tilde{l} \neq l$. Mostre que $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ se encontram num unico ponto M.

(3a) Apresenta sa definições de ângulo $\angle ABC$, e do interior deste ângulo.

(3b) Apresenta as definições de ângulo suplementar e reto, e triângulo isoceles. Tome cuidado que ângulo reto e bem definido.

(4a) Prove: dado $\triangle ABC$ com $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

(4b) Prove: Dado um segmento $\overline{AB}$, existe um ponto C tal que $\triangle ABC$ é isoceles.

(5) Dado pontos $A \neq B$ e um ponto C fora da reta $r = r(A, B)$, prove que existe uma reta l passando por C que é perpendicular ao r. (DICA: pense tambem no lado oposto da reta!)

(6) (bissetriz do ângulo). Dado $\angle BAC$, prove que existe uma unica semireta $s = \overrightarrow{AF}$, no interior do $\angle BAC$, tal que $\angle BAF \cong \angle FAC$.

GABARITO SUB

para $A, B \in \ell$ com $A, B \neq C$, (onde $A \neq B$)

1a) Def. $A \overset{C}{\sim} B$ sse $C \notin \overline{AB}$ ou $A = B$.

Teorema: (i) isto é uma relação de equivalência;

satisfaz (a) $A \sim A$ (reflex)

(b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (sim)

(c) $(A \sim B) \wedge (B \sim D) \Rightarrow (A \sim D)$. (trans.)

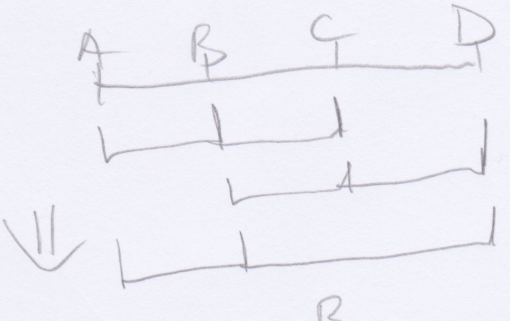
(ii) tem 2 classes de equivalência.

Isto é, $\ell \setminus \{C\} = S_1 \cup S_2$ com $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

e $A, B \in S_i \iff A \overset{C}{\sim} B$.

1b) $(A * B * C) \wedge (B * C * D) \Rightarrow (A * B * D)$.

Prova:



$A * B * C \iff A \overset{B}{\not\sim} C$

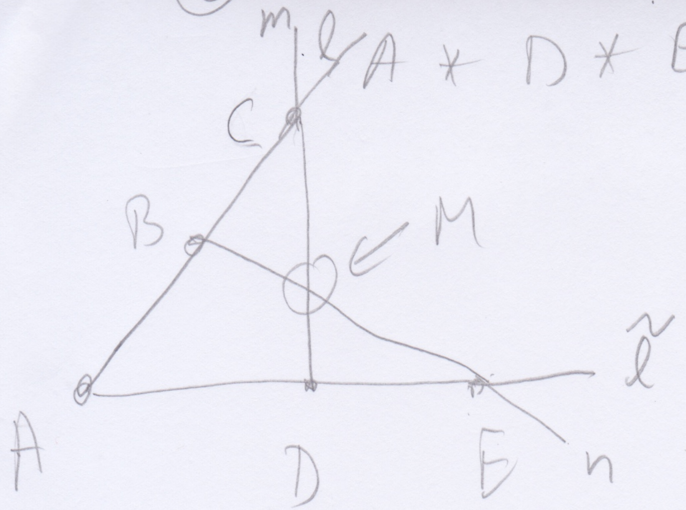
$B * C * D \Rightarrow C \overset{B}{\sim} D$. Daí,

$A \overset{B}{\not\sim} C \wedge C \overset{B}{\sim} D \Rightarrow A \overset{B}{\not\sim} D$, por transitividade.

(pois se $A \overset{B}{\sim} D$, então $A \overset{B}{\sim} D \wedge C \overset{B}{\sim} D \Rightarrow A \overset{B}{\sim} C$, uma contradição). //

② $A * B * C$ na reta l $\qquad l \neq \tilde{l}$. ②

$A * D * E$ na reta $\tilde{l}$



prove que $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{M\}$.

Prova: $l \neq \tilde{l} \Rightarrow ACD$ é triangulo.

Por I1 $\exists$ reta $n = r(B, E)$ e $m = r(C, D)$.

Sendo que $l \neq \tilde{l}$, sabemos que $m, n, l, \tilde{l}$ são retas distintas, então podem se encontrar em um ponto só, por I1.

Considerando ΔACD, ~~n~~ encontre $\overline{AC}$ no ponto B. ~~AF~~ Afirmo que $n \cap \overline{AD} = \phi$.

Pois, $n \cap \tilde{l} \ni E$, e $n \neq \tilde{l}$, daí o unico jeito e se $E \in \overline{AD}$. mas $A * D * E \Rightarrow E \neq A, D$; e $A * E * D$ e absurdo por B3. Daí por B4, sendo que n encontre o lado $\overline{AC}$ do ΔACD e não encontre $\overline{AD}$, ele tem que encontrar $\overline{CD}$.

Concluímos que $n \cap \overline{CD} \neq \emptyset$.
Só pode ser um ponto; chamamos M_1 a

Considerando ΔABE, pela mesma lógica, $m \cap \overline{BE} = \{M_2\}$.

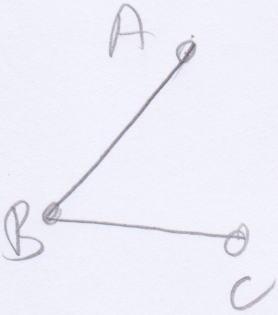
Agora, $m \cap n$ contem $m \cap \overline{BE}$ e
$n \cap \overline{CD}$,

daí contem M_1 e M_2, mas só pode ter um ponto, então $M_1 = M_2 = M$

Daí, $M \in \overline{BE}$ e $M \in \overline{CD}$ então

$M \in \overline{BE} \cap \overline{CD}$. //

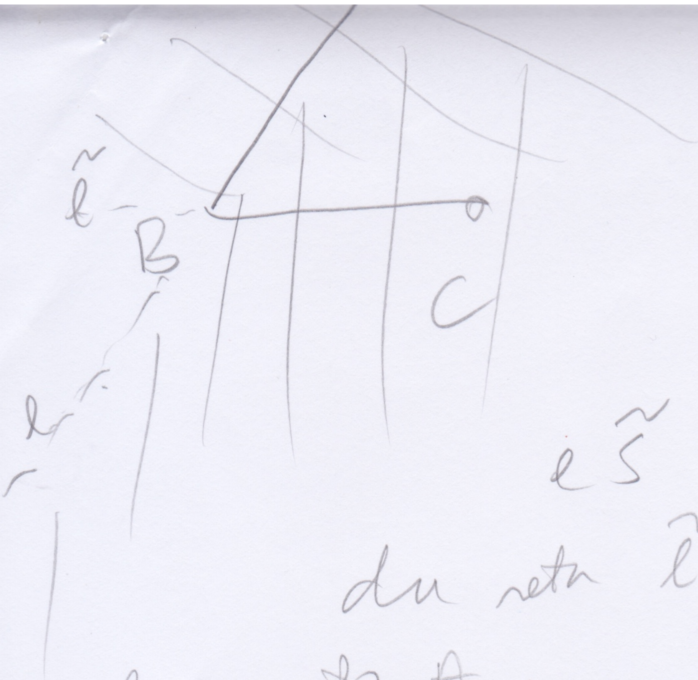
3a DEF. $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ (onde A, B, C são distintos e não-colineares)



e $\overrightarrow{BA}$ é a semireta com vertice B, no lado do ponto $A \neq B$, similar p. $\overrightarrow{BC}$.

DEF: O interior do $\angle ABC = S \cap \tilde{S}$

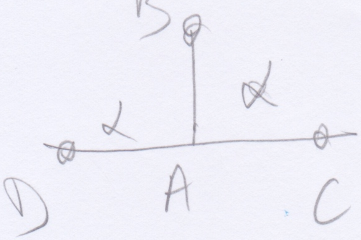
onde S é o semiplano

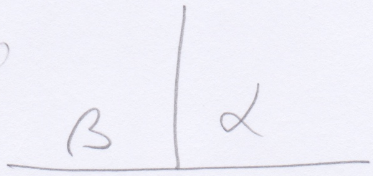


S é o semiplano da reta $\ell = r(B, A)$ no lado do ponto C, e $\tilde{S}$ é o semiplano da reta $\tilde{\ell} = r(B, C)$, no lado do ponto A.

$\mathrm{int}(\angle ABC) = S \cap \tilde{S}$.

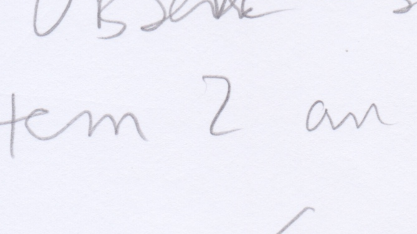
3b





Dado $D * A * C$ e B não-colinear, para $\alpha = \angle BAC$ e $\beta = \angle DAB$, então α e β são <u>suplementares</u>.

(Observe-se que cada ângulo tem 2 angulos suplementares!)

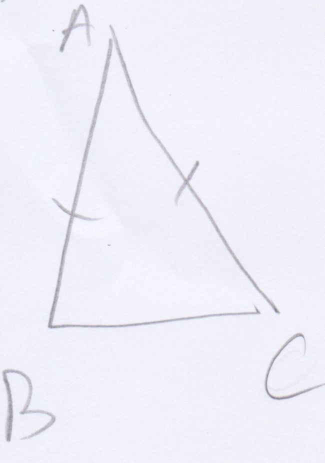


Mas $\beta \cong \tilde{\beta}$ pois são OPV (ângulos verticais).

5

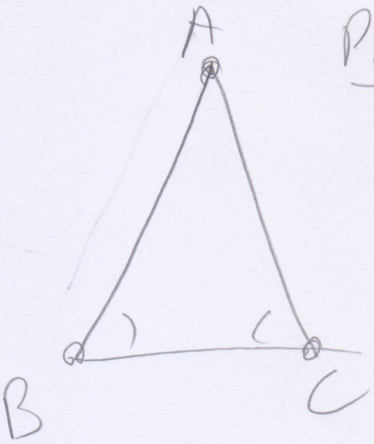
Def: α é reto sse ele é congruente a um dos seus ângulos suplementares. Pela observação $\beta \cong \tilde{\beta}$ daí não importa qual, pois se $\alpha \cong \beta$, sendo que $\beta \cong \tilde{\beta}$ então $\alpha \cong \tilde{\beta}$ (por transitividade de $\cong$ de angulos).

Def $\triangle ABC$ é isosceles se 2 dos lados são congruentes.



Por exemplo, se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

(4a) Prove: Dado $\triangle ABC$ com $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

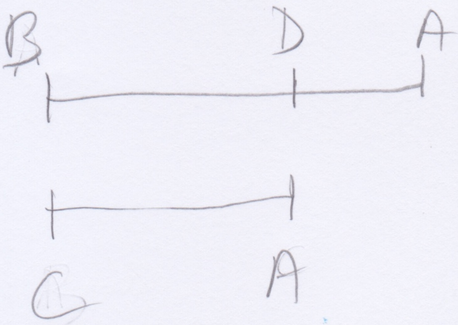


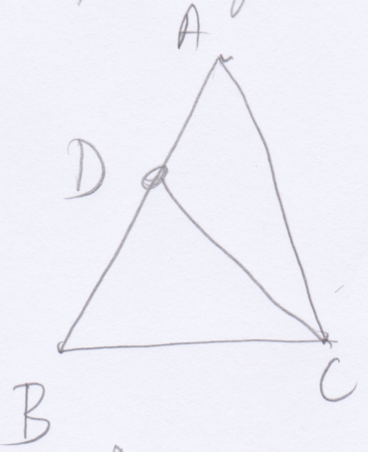
Prova: Se não, por tricotomia ou $\overline{AB} < \overline{AC}$ ou contrário.

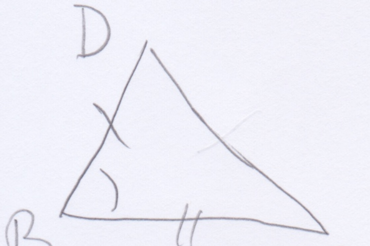
Digamos que $\overline{AC} < \overline{AB}$.

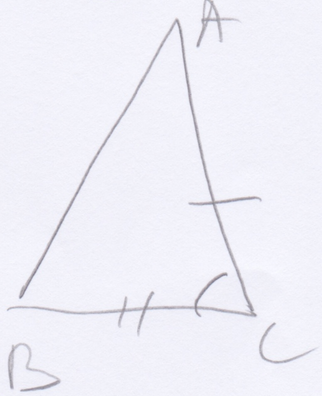
Daí, $\exists\, D \in \overrightarrow{BA}$, tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

com $A * D * B$,









Por LAL, com $\overline{DB}$, $\angle DBC$, e $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\angle ACB$, e $\overline{BC}$,

$\triangle DBC \cong \triangle ACB$. Mas $\angle ABC \cong \angle ACB$,

daí, $\angle DCB \cong \angle DBC \cong \angle ACB$.

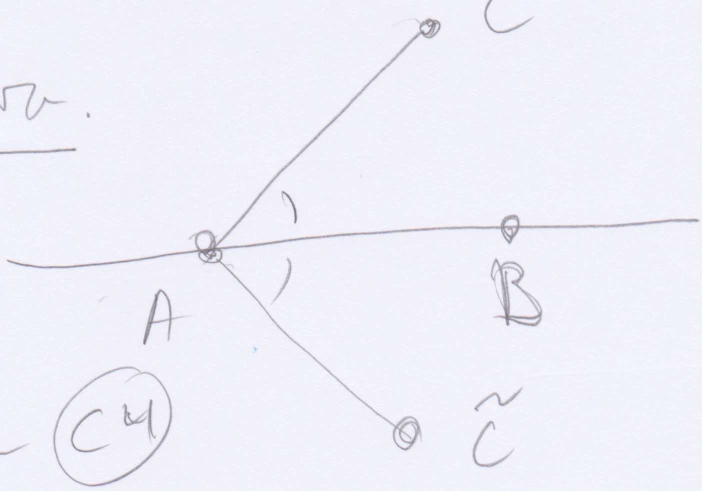
Por trans., $\angle DCB \cong \angle ACB$, um absurdo, pois D está no interior ao $\angle ACB$, então

$(\angle DCB) < (\angle ACB)$ por

definição de $<$. //

(5) Dado $A \neq B$, e C fora da reta $r = r(A,B)$, prove que existe l passando por C que é perpendicular ao r.

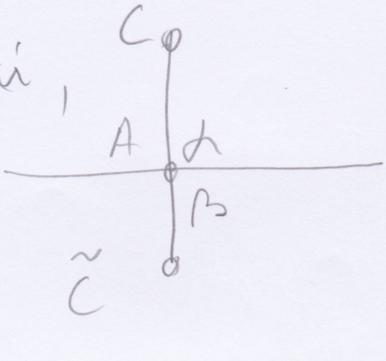
<u>Prova.</u>



considerando $\angle CAB = \alpha$,

por (C4) podemos achar um ponto $\tilde{C}$ no lado oposto da r do C, tal que $\beta = \angle BA\tilde{C} \cong \angle BAC = \alpha$. Tem <u>2</u> <u>casos</u>: <u>Caso 1</u>: $C, A, \tilde{C}$ são colineares.

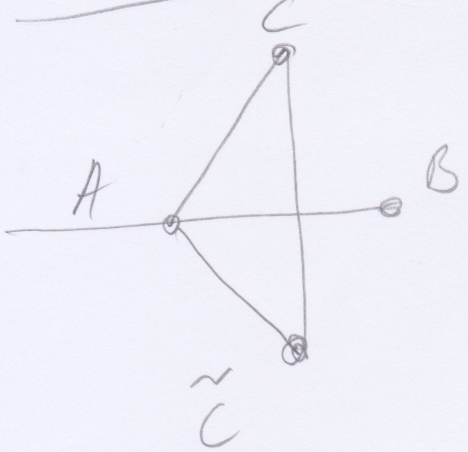
Daí,



$\alpha \cong \beta$ mas α, β são <u>suplementares</u> então α é reto e $l = r(C, \tilde{C})$ é perp.

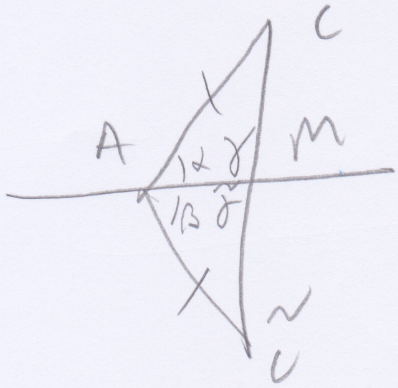
5 continuação

Caso 2: $C, A, \tilde{C}$ são não-colineares.



Agora, B está no interior do $\angle CA\tilde{C}$, então pela teorema da Barra Cruzada,

$\overrightarrow{AB}$ encontra $\overline{C\tilde{C}}$ num ponto M,



sendo que $\alpha \cong \beta$, $\overline{AC} \cong \overline{A\tilde{C}}$, e por LAL temos $\Delta\ ACM \cong \Delta\ A\tilde{C}M$.

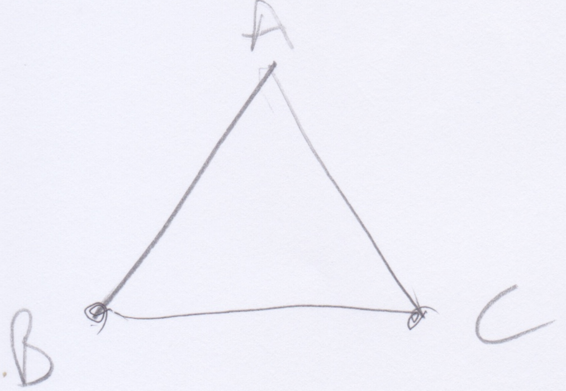
Daí, $\gamma = \angle CMA \cong \tilde{\gamma} = \angle \tilde{C}MA$,

mas $\gamma, \tilde{\gamma}$ são suplementares,

então γ é angulo reto e

$l = r(C, \tilde{C})$ e perp. ao r. //

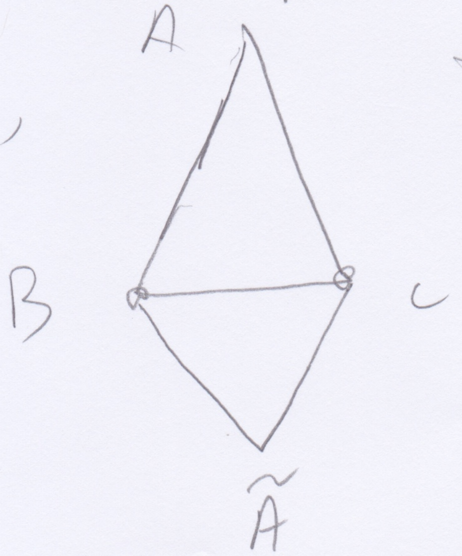
6 Dado $\angle BAC$, prove que existe uma única semirreta $s = \overrightarrow{AF}$ no interior do $\angle BAC$, tal que $\angle BAF \cong \angle FAC$.



<u>Prova</u> por <u>C1</u>, podemos assumir que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$,

Daí, $\triangle ABC$ é isósceles. Sabemos que podemos construir um $\triangle$ isósceles no lado oposto (outra Proposição),

Daí, temos $\tilde{A}$ com $\overline{B\tilde{A}} \cong \overline{C\tilde{A}}$.

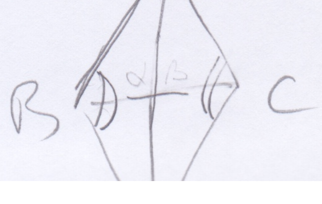


Pela proposição,

$\angle ABC \cong \angle ACB$

$\angle \tilde{A}BC \cong \angle \tilde{A}CB$

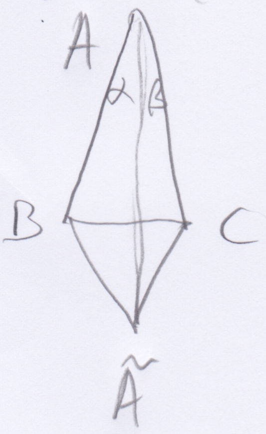
Pela som. de ângulos, $\angle AB\tilde{A} \cong \angle AC\tilde{A}$.



Agora por LAL, $\triangle AB\tilde{A} \cong \triangle AC\tilde{A}$

(6) (continuação)

(10)



Mas então $\alpha \cong \beta$, como desejamos! //.