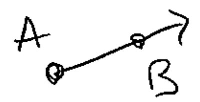
Congruencia de Angulos.

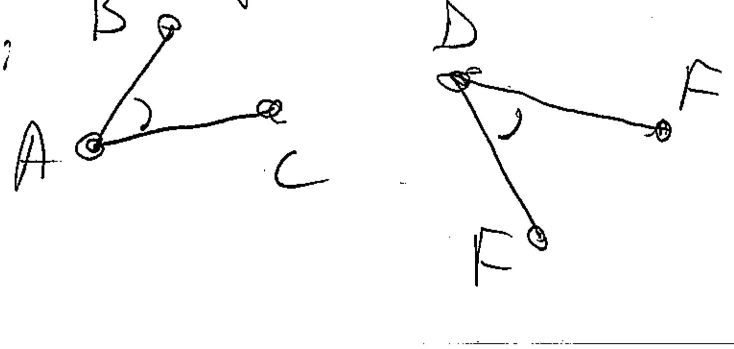
Lembre-se a definição de semireta $\overrightarrow{AB}$: 

Dado dois pontos distintos A, B, pelo teorema de Separação da Reta, o ponto A divide a reta $r(A, B)$ em 2 lados; por definição, $\overrightarrow{AB}$ $= \{E \in r : E \overset{A}{\sim} B\} \cup \{A\}$.

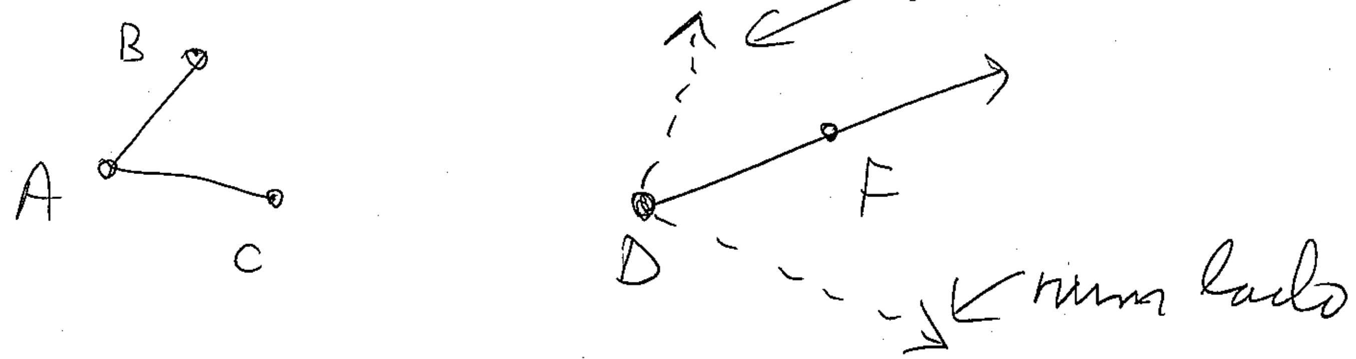
Lembre-se a definição do angulo $\angle BAC$ $= \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ (dado 3 pontos não-colineares A, B, C).

Assumimos que temos uma relação binario entre angulos, escrito $\cong$, por exemplo $\angle BAC \cong \angle EDF$, satisfazendo axiomas $\boxed{C4}$, $\boxed{C5}$, $\boxed{C6}$.

A ideia e que os angulos "tem o mesmo tamanho":

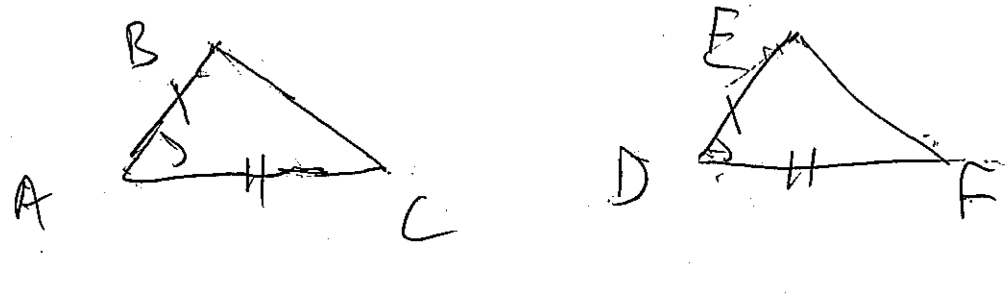


$\boxed{C4}$ Dado $\angle BAC$ e semireta $\overrightarrow{DF}$, escolhemos um lado da reta $r = r(D,F)$. Daí $\exists!$ semireta $\overrightarrow{DE}$ tal que $\angle BAC \cong \angle FDE$



$\boxed{C5}$ $\cong$ Congruência de angulos $\cong$ é uma relação de equivalência.

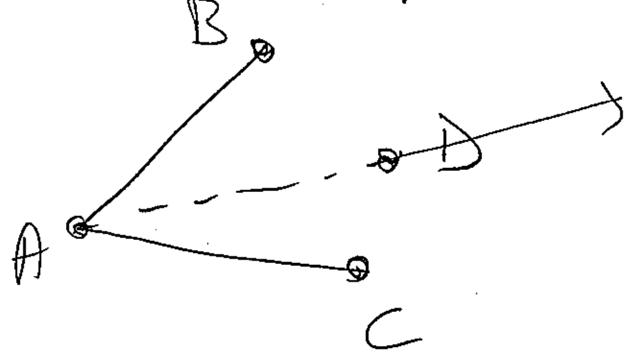
$\boxed{C6}$ LAL (Lado-angulo-lado; em ingles SAS, side-angle-side). Dado dois triangulos $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então também $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$:



Def: $\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow$ ~~os~~ correspondentes lados e ângulos são congruentes.

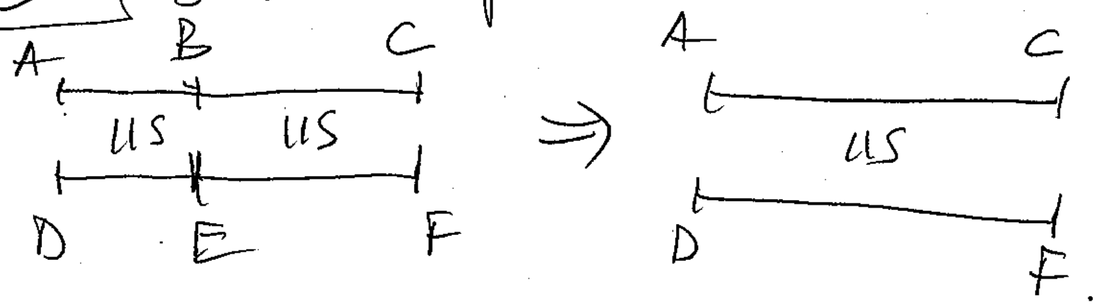
OBS: Isto também é uma rel. de equiv, pois é para congruência de segmentos e ângulos, por $\boxed{C2}$ e $\boxed{C5}$.

Def: Dado um ângulo $\angle BAC$, e dado uma semi-reta $\overrightarrow{AD}$ no interior do ângulo, dizemos que $\angle BAC$ é o somatório dos ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$:



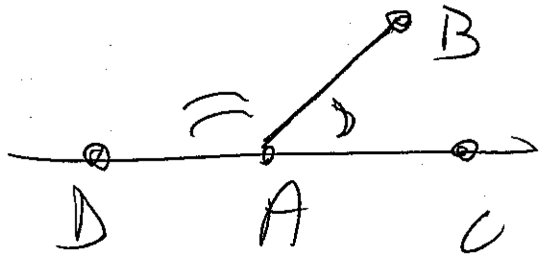
OBS: Fizemos desta maneira (começando com $\angle BAC$) para evitar por exemplo ter dois ângulos de 60° e 120° cujo "somatório" é 180° que não é ângulo para nós, pois os pontos são colineares!

<u>OBS</u>: Vamos lembrar Axioma $\boxed{C3}$ sobre segmentos, "adição":

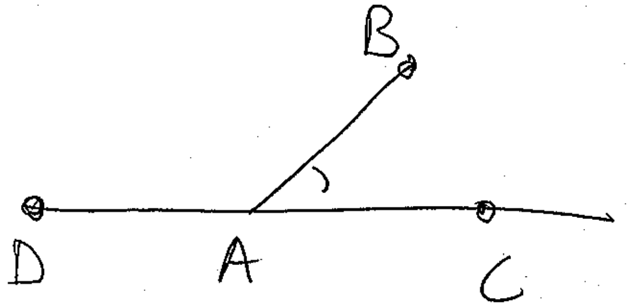


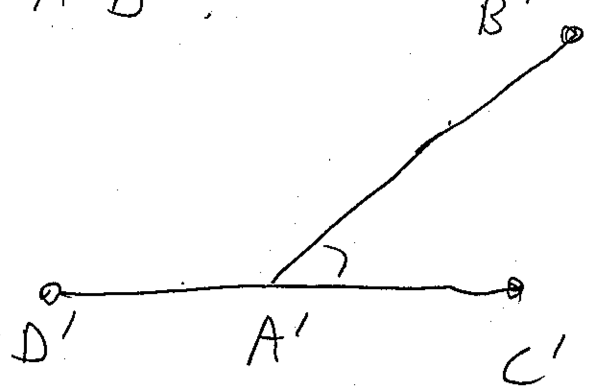
Não precisamos uma tal axioma sobre o somatório de angulos, pois a propriedade LAL vai ser suficiente para <u>provar</u> isto!

<u>Def</u>: Dado $D * A * C$ e um ponto B não-colinear com A, C então os angulos $\angle BAC$ e $\angle BAD$ são <u>suplementares</u>:

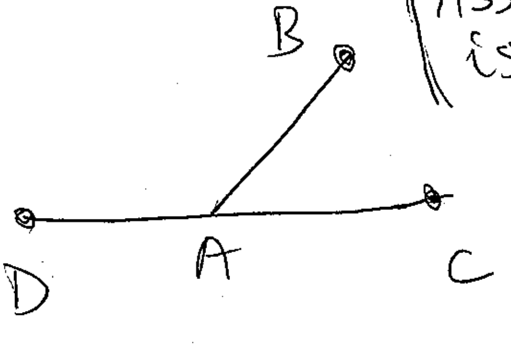


<u>Prop</u>: Dado ângulos suplementares $\angle BAC$, $\angle BAD$, e dado outros ângulos suplementares $\angle B'A'C'$, $\angle B'A'D'$ daí, se $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então também $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$.

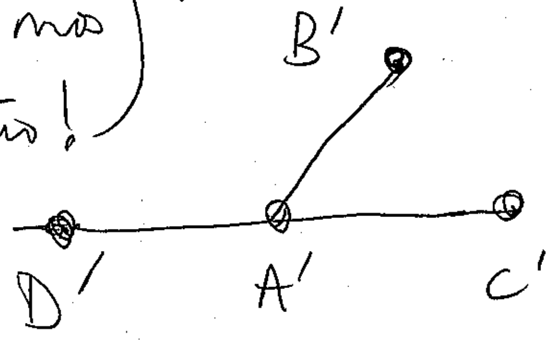




<u>Prova</u>: Não estamos dados que os correspondentes segmentos são congruentes! Entretanto, podemos assumir isto, pois o anunciado somente fale sobre <u>ângulos</u> e não segmentos; caso $\tilde{B} \in \overrightarrow{A'B'}$ então $\overrightarrow{A'\tilde{B}} = \overrightarrow{A'B'}$, e por $\boxed{C1}$, existe um único $\tilde{B} \in \overrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

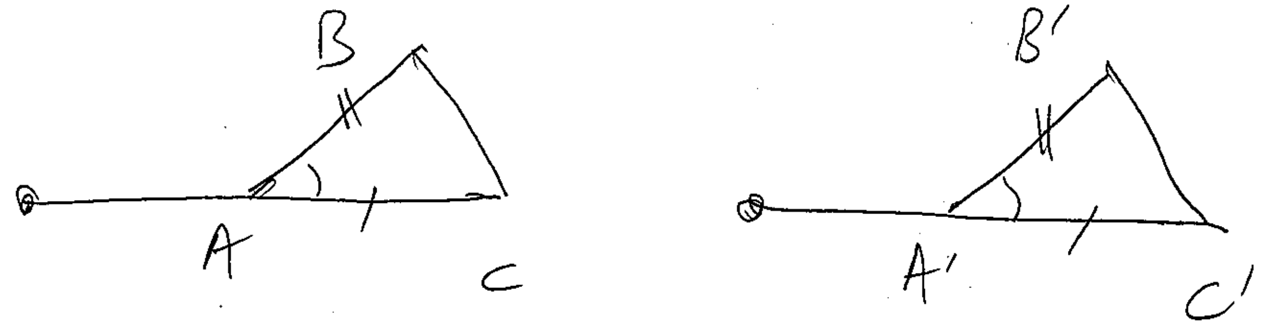


(Assumimos isto então!)

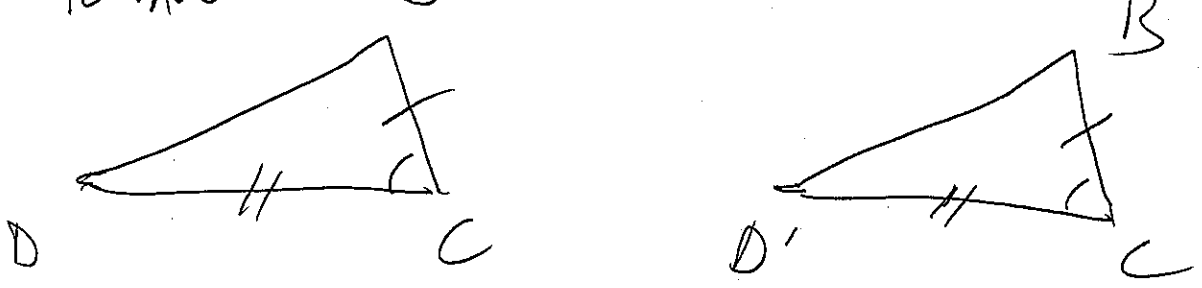


Comentário: Vamos verificar que de fato " $\tilde{E}$ e E' estão no mesmo lado da reta $l = r(D', F')$ ".

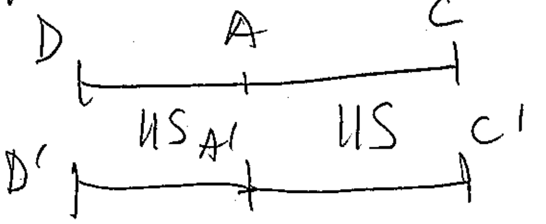
Pois: escolhemos G' para ser no mesmo lado de l como E'. E escolhemos $\tilde{E}$ para ser no lado oposto da semireta $\overrightarrow{D'G'}$ de F'. Pela adição (Proposição), $\overrightarrow{D'G'}$ esta no interior do angulo $\angle \tilde{E} D' F'$, então G' esta no mesmo lado de l como $\tilde{E}$, então de fato $E' \overset{l}{\sim} G'$ e $\tilde{E} \overset{l}{\sim} E'$; por transitividade $E' \overset{l}{\sim} \tilde{E}$.



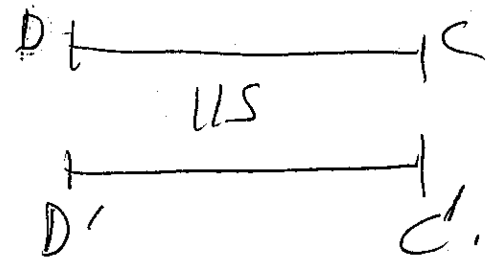
Agora por LAL, tambem $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Considerando agora os triangulos $\triangle DBC$, $\triangle D'B'C'$ temos:



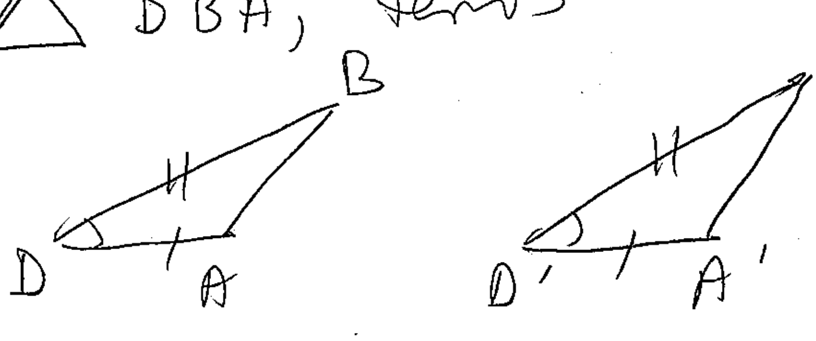
Pois, utilizando $\boxed{C3}$ (adição), temos



dai

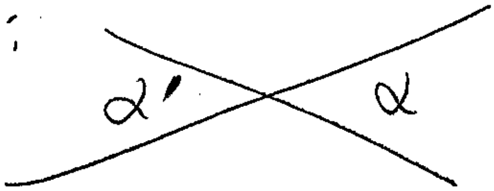


Por LAL, $DB \cong D'B'$ e $\angle BDC \cong \angle B'D'C'$. Agora considerando $\triangle DBA$, temos



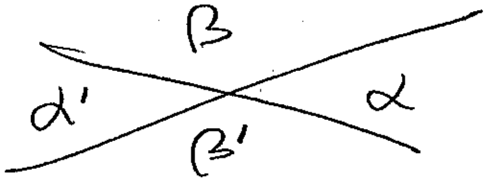
então $\angle DAB \cong \angle D'A'B'$.

Def ângulos α, α' são **verticais** sse eles estão definidos pelas semi-retas opostos de duas retas:

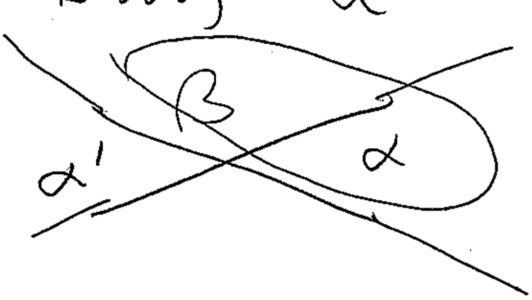


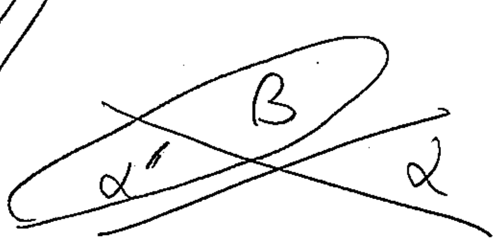
Prop. Ângulos verticais são congruentes.

Prova. É um corolário da prop. anterior. Temos outros 2 ângulos verticais:



Agora, α e β são suplementares, mas também α' e β são suplementares! Daí, $\alpha \cong \alpha'$. //





VIII (b) (8)

Prop. (Adição de angulos)

Dado $\angle BAC$ que é o somatório dos angulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$, caso se temos outros dois angulos $\angle B'A'D'$ e $\angle D'A'C'$ congruentes aos $\angle BAD$, $\angle DAC$ respectivamente, e se eles estão nos lados opostos da semireta $\overrightarrow{A'D'}$, então:

(1) $\angle B'A'C'$ é um angulo, congruente ao $\angle BAC$;

(2) $\overrightarrow{A'D'}$ está no interior dele.

OBS: Segue que $\angle B'A'C'$ é o somatório de $\angle B'A'D'$ e $\angle D'A'C'$.

Daí, "o somatório de angulos congruentes é congruente ao somatório dos angulos":

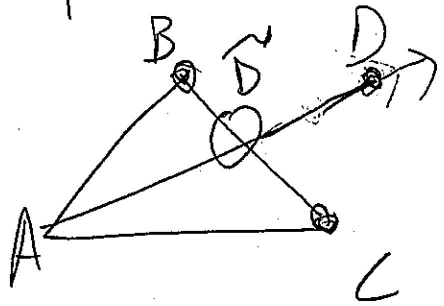
$$\angle BAD \cong \angle B'A'D' \text{ e } \angle DAC \cong \angle D'A'C'$$

$$\Longrightarrow \angle BAD + \angle DAC \cong \angle B'A'D' + \angle D'A'C'.$$

CUIDADO: O significado de escrever

$\angle BAD + \angle DAC$ é que:
existe um ângulo $\angle BAC$ ~~tal~~ que
$\overrightarrow{AD}$ está no interior dele!!

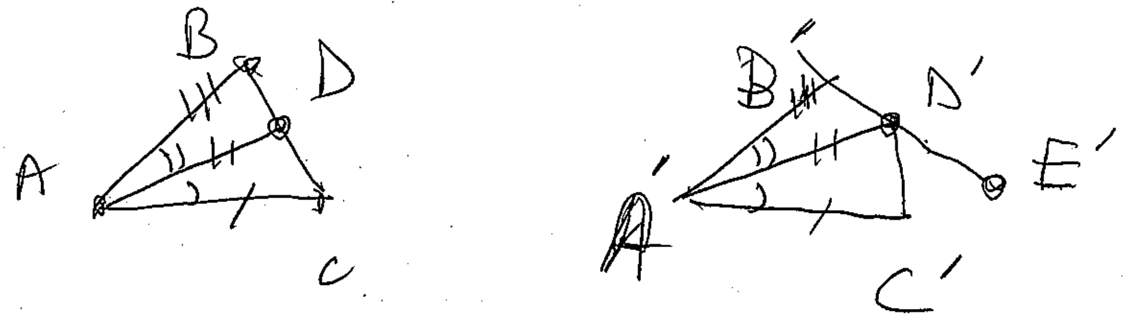
Prova: Estamos dados A, B, C não-colineares, e semirreta $\overrightarrow{AD}$ no interior. Pela Teorema da Barra Cruzada, podemos trocar D para $\tilde{D} \in \overrightarrow{AD}$ com $B * \tilde{D} * C$:



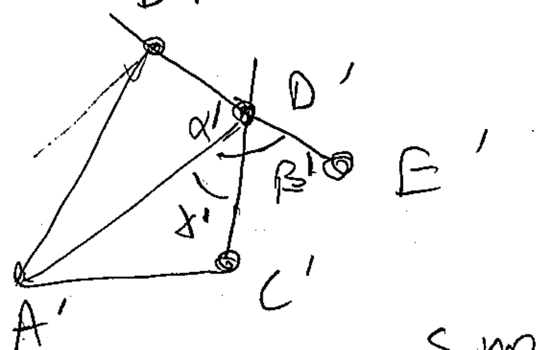
Aí, assumimos isto.

Também podemos assumir que C' é tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, etcetera,
Aí, ~~temos~~: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$.
Entretanto, não podemos assumir que B', D', C' são colineares — é necessário provar isto!

Estamos na seguinte situação: 10

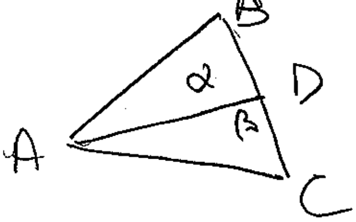


Queremos provar que $B' * D' * C'$.
Para fazer isto, definamos por $\boxed{B2}$ um ponto E' com $B' * D' * E'$.

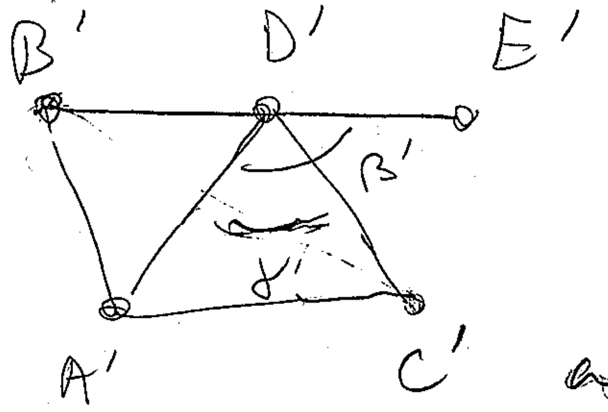


Agora, $\alpha' = \angle B'D'A'$ e $\beta' = \angle E'D'A'$ são suplementares.

Também, $\alpha = \angle BDA$ e $\beta = \angle CDA$

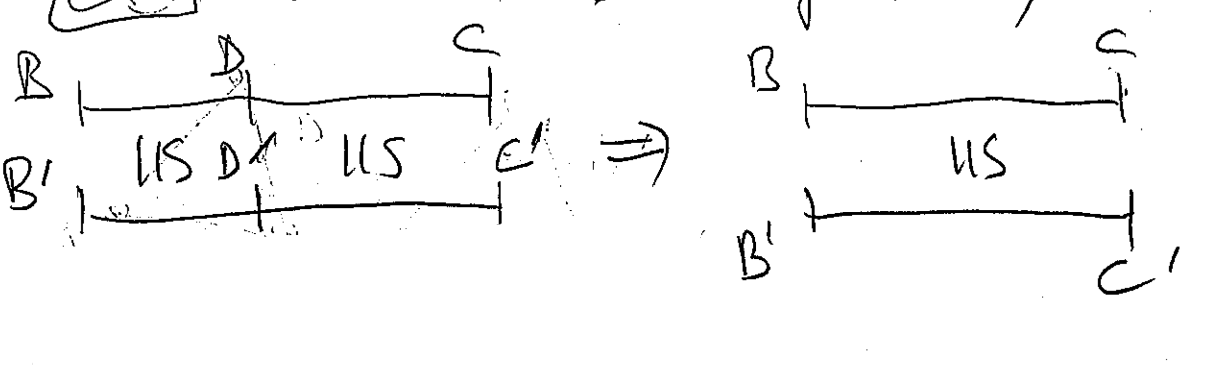


são suplementares, Por LAL, $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$ daí $\alpha \cong \alpha'$. Pela Prop., $\beta \cong \beta'$.
Mas, olhando no $\Delta A'C'D'$, por LAL $\Delta A'C'D' \cong \Delta ACD$, daí $\gamma' \cong \beta$. Temos dois ângulos congruentes: $\gamma' \cong \beta'$.



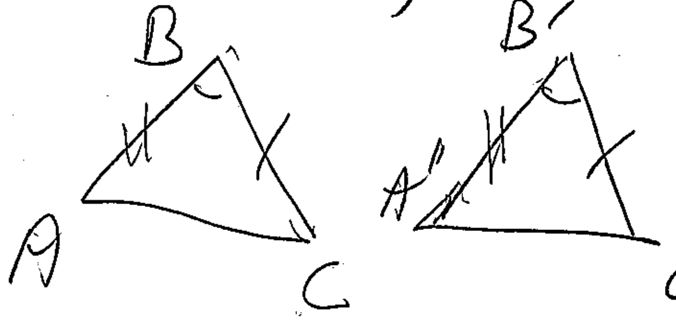
$(\gamma' \cong \beta')$

Agora, olhando para a hipótese da Proposição, $\angle B'A'D'$ e $\angle D'A'C'$ estão nos lado oposto da reta $r = r(A', D')$. Então $C' \overset{r}{\not\sim} B'$. Também $B' * D' * E'$, daí $B' \overset{r}{\not\sim} E'$. Segue que $E' \overset{r}{\sim} C'$. Mas pela $\boxed{C4}$, existe uma única semireta com determinado ângulo, num determinado lado de $\overrightarrow{A'D'}$. Então $\overrightarrow{D'E'} = \overrightarrow{D'C'}$, quer dizer, B', D', E', C' são colineares. Então B', D', C' são colineares. Agora $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ por $\boxed{C3}$ (adição de segmentos)



Agora, $A'D'C'$ é um angulo, e B', D', C' são colineares, mas isto implica que A', B', C' não são colineares (se não, A', D', C' são colineares, uma contradição). Isto é, temos um triangulo $\Delta A'B'C'$.

Por LAL, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



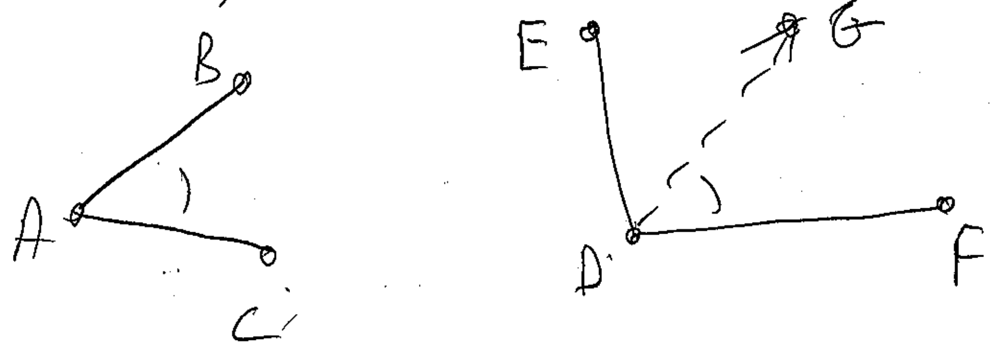
Especificamente, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, provando ①. Com $r = r(A', D')$

Sabemos já que $B' \neq C'$; B', D', C' são colineares então $B' * D' * C'$.

Daí, $\overrightarrow{A'D'}$ está no interior do angulo $\angle B'A'C'$: Dado $B' * D' * C'$, $B' \overset{C'}{\sim} D'$ e $D' \overset{B'}{\sim} C'$, então $B' \sim D'$ pela reta $A'C'$, e $D' \sim C'$ pela reta $A'B'$, isto é, $\overrightarrow{A'D'}$ está no interior do angulo. //

VIII (c) Ordem de Angulos (1)

Def.: Dado dois angulos $\angle BAC$, $\angle DEF$ definimos $(\angle BAC) < (\angle EDF)$ (e menor) sse $\exists$ semiaeta $\overrightarrow{DG}$, no interior do $\angle EDF$, tal que $\angle BAC \cong \angle GDF$.

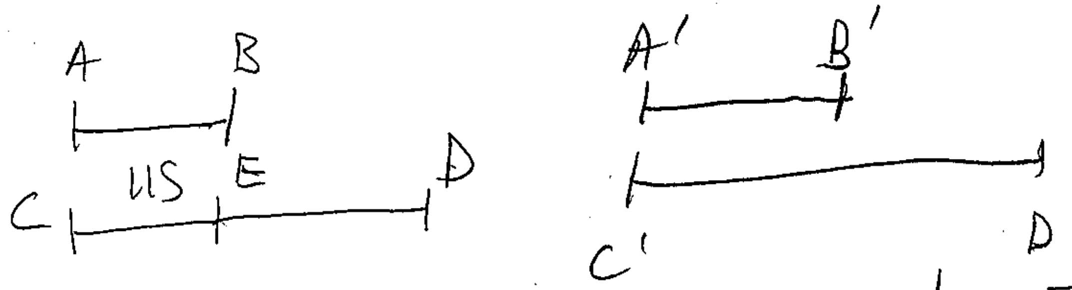


Prop:
(a) $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$ ~~e~~ $\alpha < \beta$ então $\alpha' < \beta'$.

(b) $<$ e transitivo

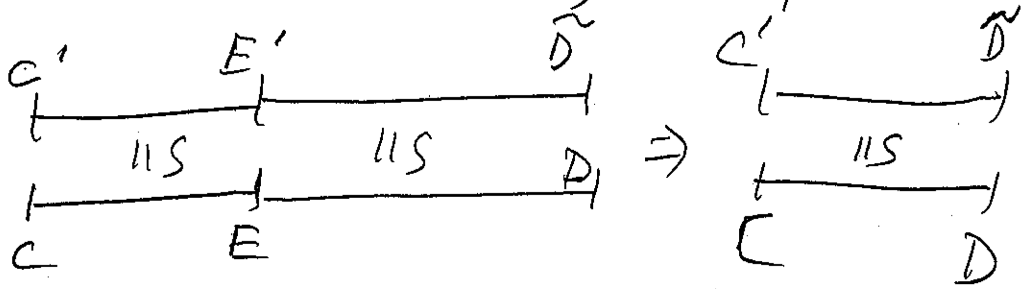
(c) trichotomia: dado dois angulos α e β, exatamente um vale: $\alpha < \beta$, $\alpha \cong \beta$, $\beta < \alpha$.

Prova. O anunciado e a prova são bem parecido ao caso de congruencia de segmentos. Vamos lembrar: $\overline{AB} < \overline{CD}$ sse $\exists$ E com $C * E * D$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. A prova foi assim:



Temos que definir um ponto $E' \in \overline{C'D'}$.
tal que $\overline{A'B'} \cong \overline{C'E'}$. Isto é
fácil, por $\boxed{B1}$: podemos marcar
um tal ponto na semirreta $\overrightarrow{C'D'} = r$.
Entretanto, precisamos mostrar que
$C' * E' * D'$!!! Para fazer isto,
primeiro marcamos E', no r, depois
adicionamos um segmento congruente ao
$\overline{ED}$ e definindo $\tilde{D}$ para ser o
ponto único na semirreta s com
vértice E', no lado oposto de C',
tal que $\overline{E'D'} \cong \overline{ED}$. (Uma outra
maneira a definir isto é: $\tilde{D}$ é o
ponto tal que $\overline{C'\tilde{D}} = \overline{C'E'} + \overline{ED}$).

Daí, temos: $C' * E' * \tilde{D}$, e por adição,



mas também $\overline{C'D'} \cong \overline{CD}$,

então $D' = \tilde{D}$, terminando a prova.

Vamos agora tentar fazer igual com ângulos!

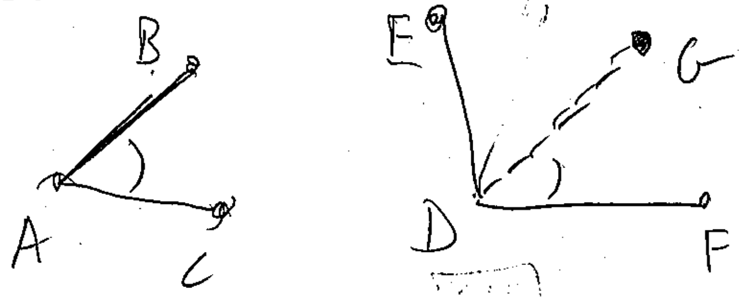
(Primeiro, vocês devem tentar...)

!!!

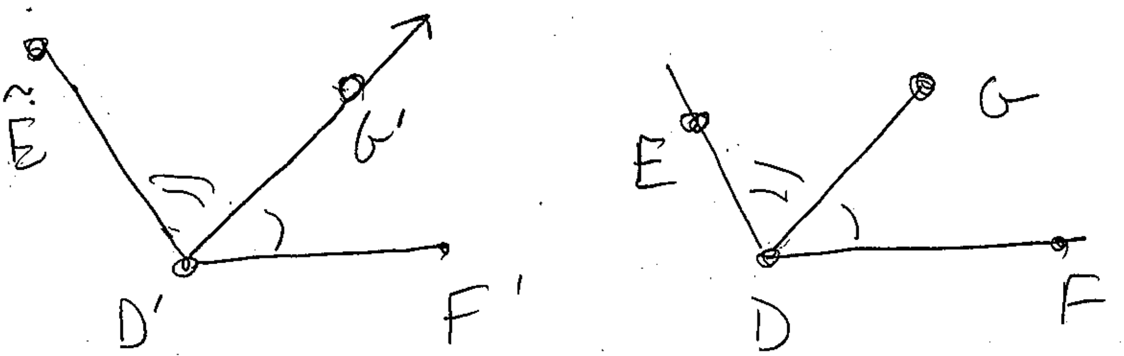
Prova da Prop:

Dado $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle EDF \cong \angle E'D'F'$,
se $(\angle BAC) < (EDF)$ então $(\angle B'A'C') < (E'D'F')$.

Temos uma semireta $\overrightarrow{DG}$ no interior do $\angle DEF$ com $\angle BAC \cong \angle GDF$;

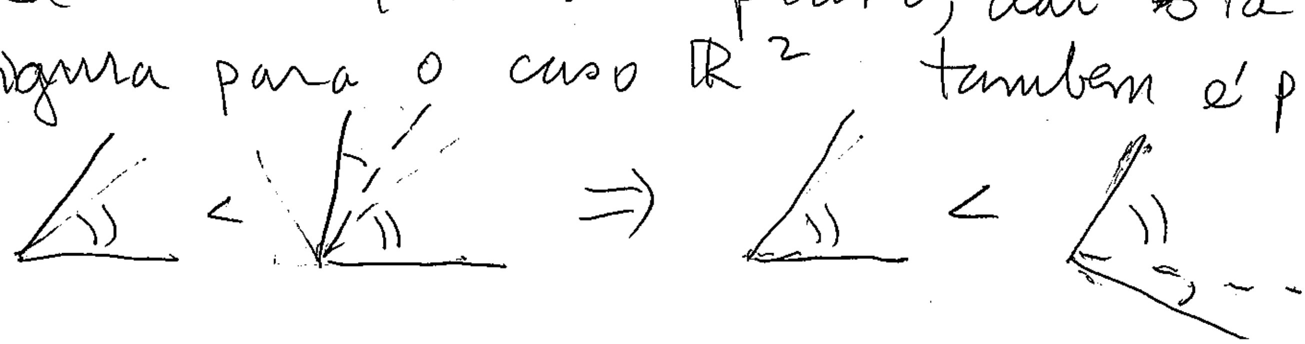


Utilizando $\boxed{C4}$,
construimos a semireta $D'G'$ no mesmo lado da reta $D'F'$ como E', tal que $\angle G'D'F' \cong \angle B'A'C'$. Gostaremos verificar que G' está no interior do angulo $\angle E'D'F'$ (parecido com a prova para segmentos!!!) Em vez de fazer isto diretamente, construimos (por $\boxed{C4}$) uma semireta $\overrightarrow{D'\tilde{E}}$ no lado oposto da reta $D'G'$ do F', tal que
$\angle \tilde{E}D'G' \cong \angle EDG$.



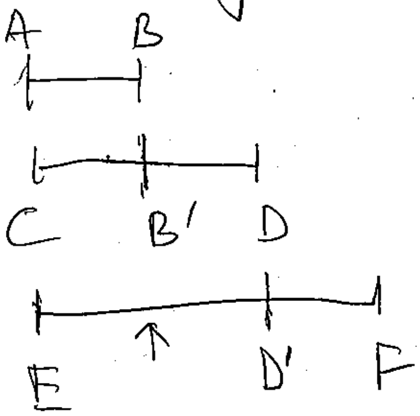
Estamos exatamente na situação da Proposição de Adição de Ângulos: $\overrightarrow{D'\tilde{E}}$ e $\overrightarrow{D'F'}$ estão nos lados opostos da reta $D'G'$. Pela Proposição, concluímos que: $\angle \tilde{E}D'F'$ é um ângulo, com $\overrightarrow{DG'}$ no interior dele, e $\angle \tilde{E}D'F' \cong \angle EDF$. Mas também $\angle E'D'F' \cong \angle EDF$. Observe-se que $\tilde{E}$ e E' estão no mesmo lado da reta l=reta(D', F') (pela construção). Daí por $\boxed{C4}$ (a unicidade), $\overrightarrow{D'\tilde{E}} = \overrightarrow{D'E'}$, provando que de fato $(\angle B'A'C') < (E'D'F')$. //

$\boxed{\text{OBS:}}$ Não temos ainda uma ideia da "orientação" do plano, daí esta figura para o caso $\mathbb{R}^2$ também é possível:

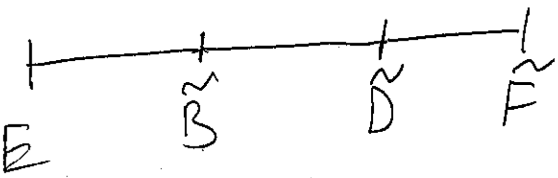


Prova parte (b): se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ então $\alpha < \gamma$.

De novo, pensamos ~~na~~ analogia com segmentos: lembramos:



a ideia foi de construir $\tilde{B} \in \overrightarrow{EF}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{E\tilde{B}}$ e depois verificar que $E * \tilde{B} * F$. Mas na verdade construimos 3 pontos;

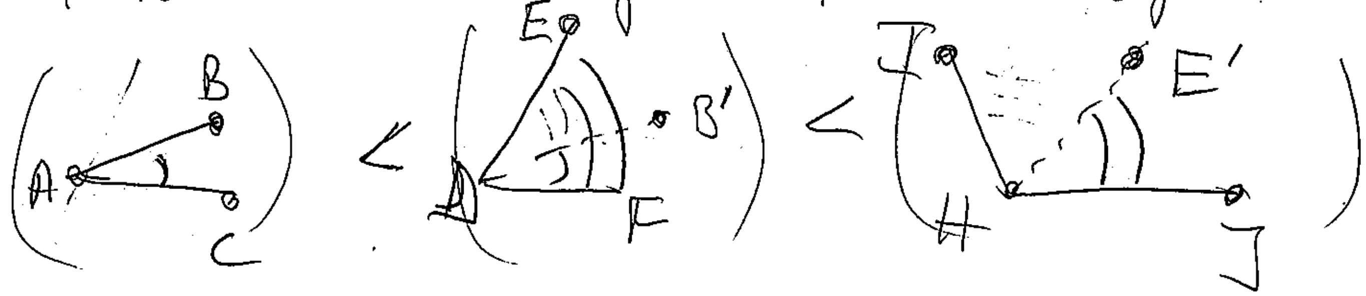


tal que os segmentos são congruentes aos $\overline{AB}$, $\overline{B'D}$, e $\overline{D'F}$ respectivamente. Segue da adição que $\tilde{D} = D'$ e $E * \tilde{B} * \tilde{D}$, e de novo da adição $\tilde{E} * \tilde{D} * F$. Daí que $\tilde{F} = F$ e

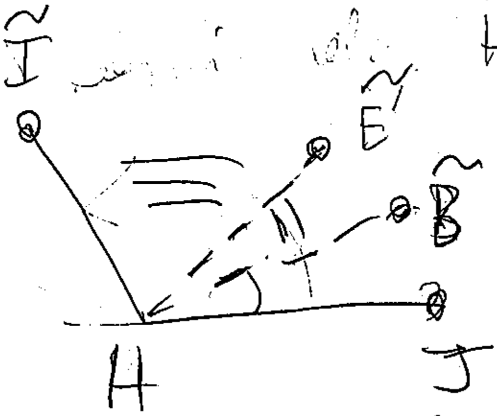
temos: $E * \tilde{B} * \tilde{D}$ ~~* e F~~ $\tilde{B} * \tilde{D} * F$,

segue do $\boxed{7.1}$ que $E * \tilde{B} * F$. //

Tentamos fazer igual para ângulos.

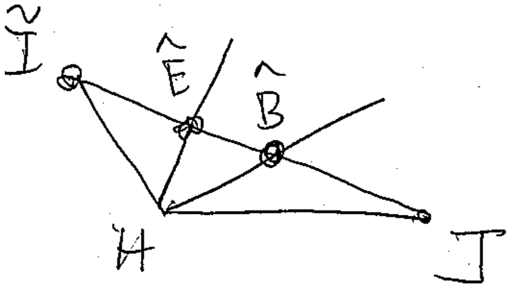


Utilizando $\boxed{C4}$, construímos semiretas $\overrightarrow{H\tilde{B}}$, $\overrightarrow{H\tilde{E}}$ e $\overrightarrow{H\tilde{I}}$ como na figura

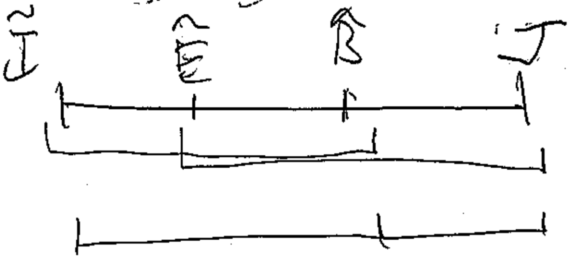


Como acima, $\overrightarrow{H\tilde{B}}$ está no interior do $\angle \tilde{E}'HJ$ então $\angle \tilde{E}'HJ \cong \angle E'HJ$ pela Prop. de adição de ângulos. Também $\angle \tilde{I}HJ \cong \angle IHJ$ (mesma razão). Então $\overrightarrow{HI} \cong \overrightarrow{H\tilde{I}}$. Finalmente, $\overrightarrow{H\tilde{B}}$ está no interior do $\angle IHJ$ que vai terminar a prova. Para mostrar isto, precisamos pensar um pouco, pela analogia com segmentos, seria uma surpresa se não precisamos utilizar

O famoso exercício 7.1. Mas como podemos fazer isto? Precisamos pontos colineares, e isto conseguimos através do Teorema Da Barra Cruzada:



podemos trocar $\tilde{E}$, $\tilde{B}$ para pontos $\hat{E}$, $\hat{B}$ nas semi-retas e também no segmento $\tilde{I}J$. Temos $\hat{E} * \hat{B} * J$, e $J * \hat{B} * \tilde{I}$. Por 7.1, isto implica



$\tilde{I} * \hat{B} * J$;

Daí, $\tilde{I}$ e $J\hat{B}$, $\hat{B}$ e $\tilde{I}$, implicando que a semi-reta $\overrightarrow{H\hat{B}}$ está nos lados corretos das retas $r(H, \tilde{I})$ e $r(H, J)$ para provar que $\overrightarrow{H\hat{B}}$ está de fato no interior do $\angle \tilde{I} H J$. //

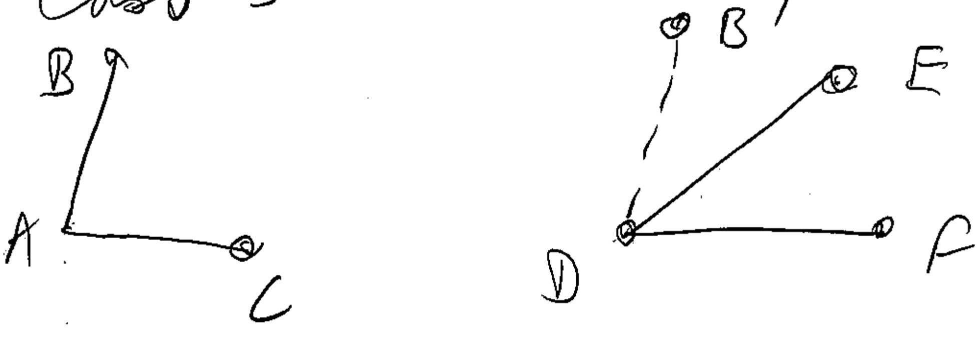
$\tilde{I} * \hat{B} * J \leftarrow \overrightarrow{H\hat{B}}$ no interior!

Prova da tricotomia.

Primeiro, vamos lembrar a prova para segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$,
Marcamos na semireta $\overrightarrow{CD}$ o ponto único B', ~~tal que~~ $\overline{CB'} \cong \overline{AB}$.
Se $B' = D$ então $\overline{CD} \cong \overline{AB}$. Se não, por $\boxed{B3}$ exatamente um dos três pontos C, D, B' está no meio. Mas $B' * C * D$ não é possível sendo que $B' \overset{C}{\sim} D$ (estão no mesmo lado do ponto C). Caso $C * B' * D$, por definição $\overline{CB'} < \overline{CD}$, e sendo que $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$, também $\overline{AB} < \overline{CD}$ (utilizando parte ⓐ da Prop. sobre ordem de segmentos), e caso $C * D * B'$, então $\overline{CD} < \overline{CB'} \cong \overline{AB}$. //

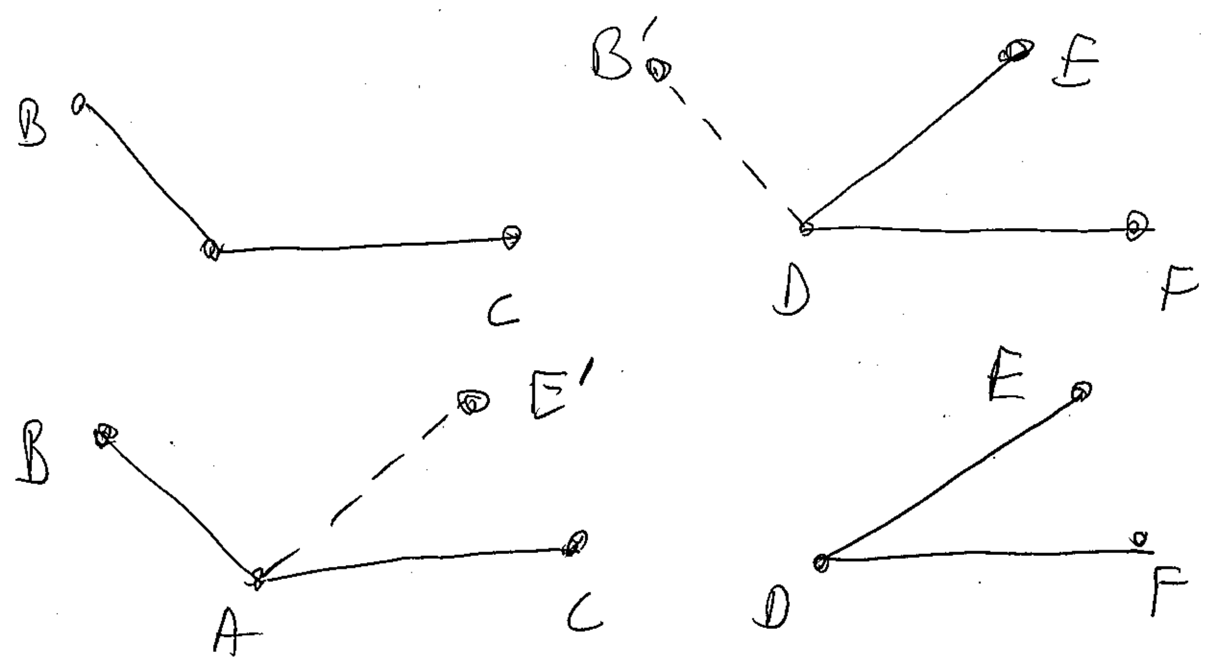
Aí tentamos fazer para ângulos.

Dado $\angle BAC$ e $\angle EDF$, desenhamos uma semi reta $\overrightarrow{DB'}$ no mesmo lado da semireta como o ponto E. Temos 3 possibilidades: $B' \in \overrightarrow{DE}$, ou está num lado ou no outro lado. Caso $B' \in \overrightarrow{DE}$, $\angle B'DF = \angle EDF$ então $\angle BAC \cong \angle EDF$. Caso está no lado de F, então $\overrightarrow{DB'}$ está no interior de $\angle EDF$, daí $(\angle BAC) < (\angle EDF)$ por definição. Caso está no outro lado, temos:



Isto significa que B' e F estão nos lados opostos de $\overrightarrow{DE}$. Sendo que E está no mesmo lado da reta DF como B', então $\overrightarrow{DE}$ está no interior de $\angle B'DF$.

Por (C4) marcamos uma semirreta $\overrightarrow{AE'}$ tal que $\angle E'AC \cong \angle EDF$.

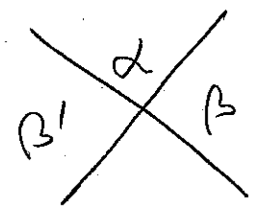


Pela Prop de Somatório de Ângulos, $\overrightarrow{AE'}$ está no interior de $\angle BAC$, então $(\angle EDF) < (\angle BAC)$. //

Ângulos Retos.

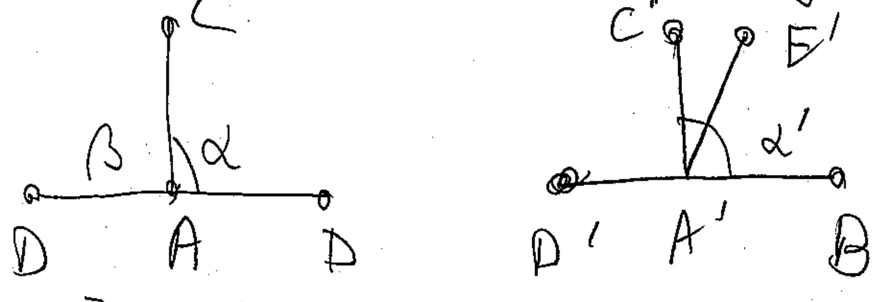
<u>Def</u>: um ângulo α é <u>~~reto~~</u> sse $\alpha \cong \beta$ onde β é um ângulo suplementar ao α.

<u>OBS</u>: Tem 2 ângulos suplementares mas não importa qual pois β, β' são <u>verticais</u> (OPV) então congruentes.



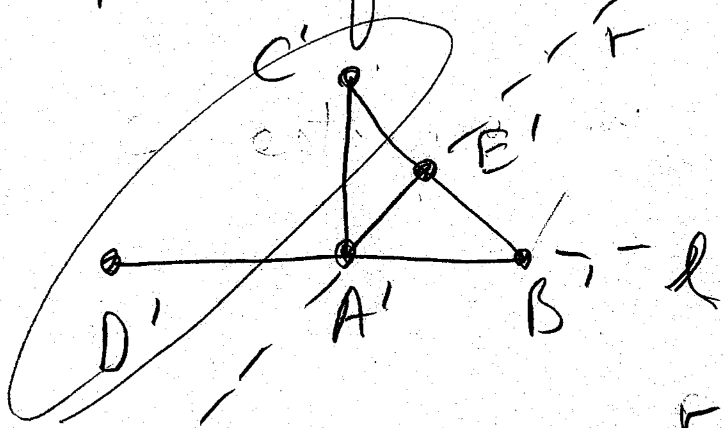
<u>Prop</u> Se α, α' são ângulos retos então $\alpha \cong \alpha'$.

<u>Prova</u>: Se não, por tricotomia ou $\alpha < \alpha'$ ou $\alpha' < \alpha$. Digamos $\alpha < \alpha'$.



daí existe $\overrightarrow{A'E'}$ no interior de $\angle C'A'B'$ tal que $\angle E'A'B' \cong \alpha$. Observe-se que $\overrightarrow{C'A'}$ está no interior de $\angle D'A'E'$:

Temos que verificar 2 coisas: (2a)



para $r = \text{reta}(A'E')$

e $l = \text{reta}(A'B')$

Queremos: (1) $C' \overset{r}{\sim} D'$ pela Teorema

(2) $C' \overset{l}{\sim} E'$ da Barra

Cruzada, podemos assumir que $C' * E' * B'$

Daí $C' \overset{B'}{\sim} E' \Rightarrow C' \overset{l}{\sim} E'$ pois

$\overline{C'E'} \cap l = \overline{C'E'} \cap \{B'\} = \emptyset$

(a reta $C'E'$ encontra l num ponto só).

E $C' * E' * B' \Rightarrow C' \overset{E'}{\not\sim} B' \Rightarrow C' \overset{r}{\not\sim} B'$

Mas $D' * A' * B' \Rightarrow D' \overset{A'}{\not\sim} B' \Rightarrow D' \overset{r}{\not\sim} B'$

e $(C' \overset{r}{\not\sim} B') \wedge (D' \overset{r}{\not\sim} B') \Rightarrow C' \overset{r}{\sim} D'$. //

Daí, $\beta' < (\angle E'A'D') \cong \beta, \Rightarrow \beta' < \beta$

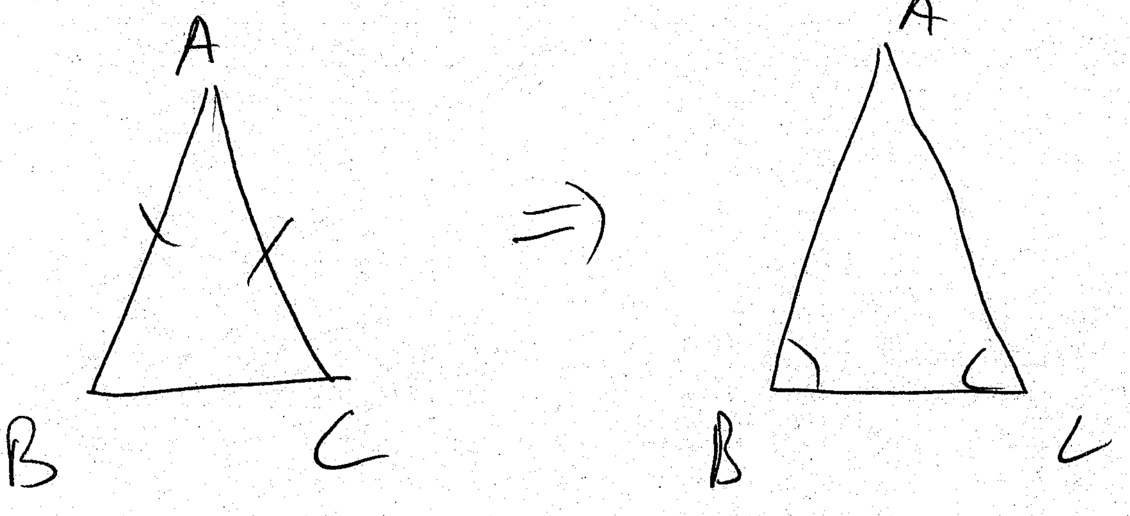
que é um absurdo, sendo que então

$\alpha' \cong \beta', \alpha \cong \beta \Rightarrow \alpha' < \alpha$ (e sabemos

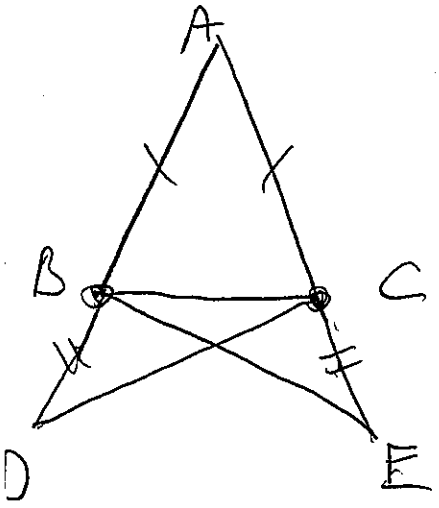
$\alpha < \alpha'$. //

Triangulos Isoceles:

Prop. Num triangulo isoceles, os dois angulos da base são congruentes. Isto é, dado $\triangle ABC$ com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então $\angle ABC \cong \angle ACB$.



<u>Prova</u>: Por B2, $\exists$ F com $A*B*D$.
Por C1, $\exists$ E na semi-reta $\overrightarrow{AC}$ com $\overline{CE} \cong \overline{BD}$:

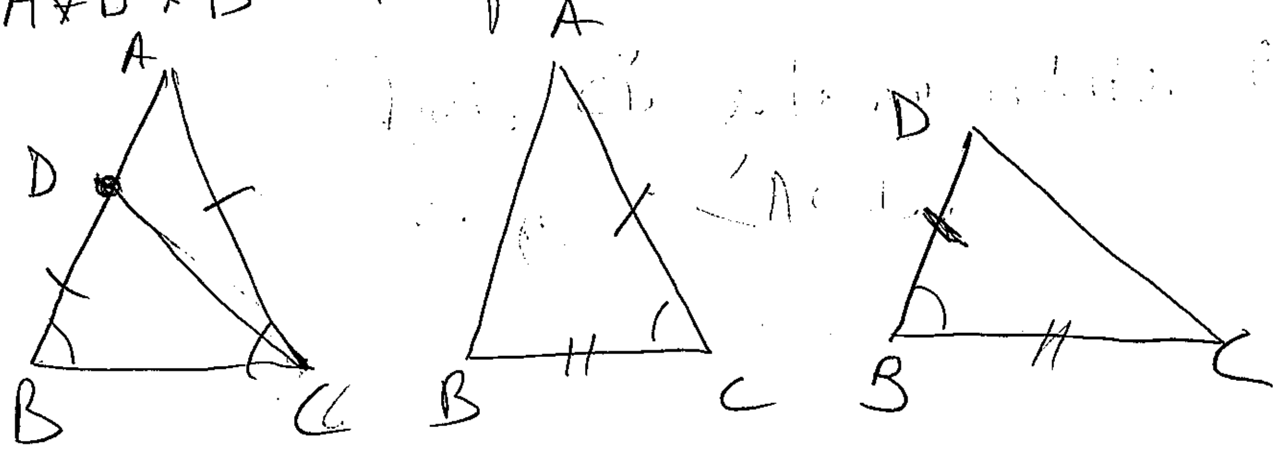


Por adição (C3) temos $\overline{AD} \cong \overline{AE}$. Utilizamos LAL (C6) com angulo na vertice A: então $\triangle ADC \cong \triangle AEB$.

Daí, $\overline{DC} \cong \overline{BE}$ e $\angle BDC \cong \angle CEB$.
Por LAL, $\triangle BDC \cong \triangle CEB$.
Daí, $\angle DBC \cong \angle ECB$. Os angulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são suplementares a estes, então pela Prop. sobre angulos suplementares, $\angle ABC \cong \angle ACB$. //

<u>Prop.</u> (a conversa!) Dado $\triangle ABC$ com $\angle ABC \cong \angle ACB$, então $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, isto é, $\triangle ABC$ é isoceles.

Prova: Se $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$, um é menor (por tricotomia). Digamos $\overline{AC} < \overline{AB}$. Por C1, $\exists!\, D$ com $A * D * B$ tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$:

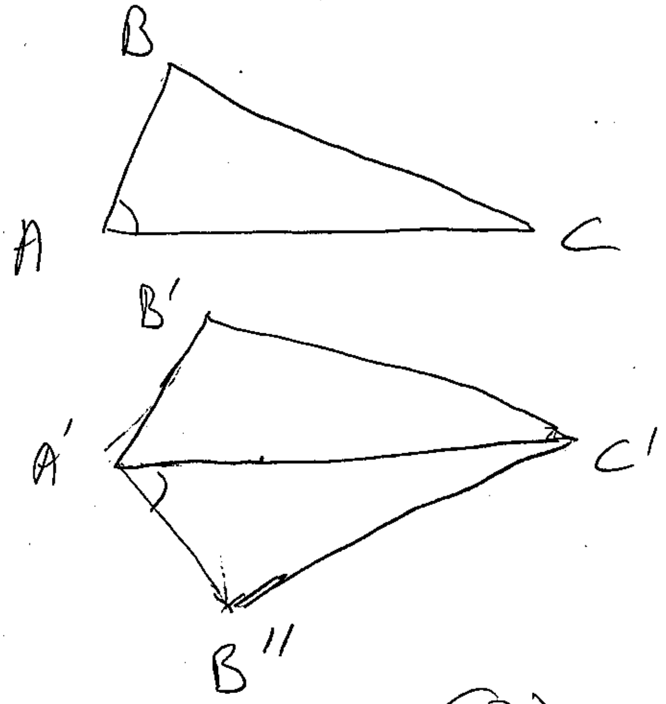


Por LAL, $\Delta ACB \cong \Delta DBC$, pois $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ e $\angle ACB \cong \angle DBC$.

Daí, $\angle DCB \cong \angle ABC \cong \angle ACB$, então $\angle DCB \cong \angle ACB$. Entretanto, $\overrightarrow{DC}$ está no interior do $\angle ACB$, então $(\angle DCB) < (\angle ACB)$, um absurdo. $\divideontimes$ //

Prop (LLL) Dado dois triangulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

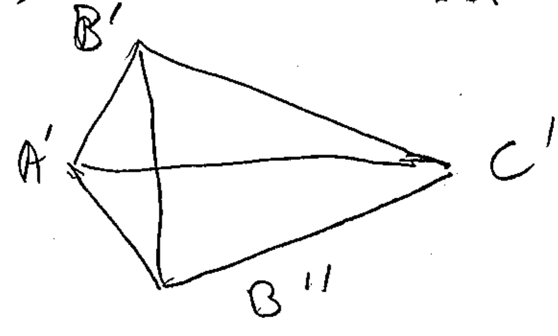
Prova:



Construimos (por C4 e C1) um ponto B'' no lado oposto da reta $A'C'$ tal que $\angle BAC \cong \angle B''A''C''$ e $\overline{A'B''} \cong \overline{AB}$.

Desenhamos $\overline{B''C'}$, por I1.

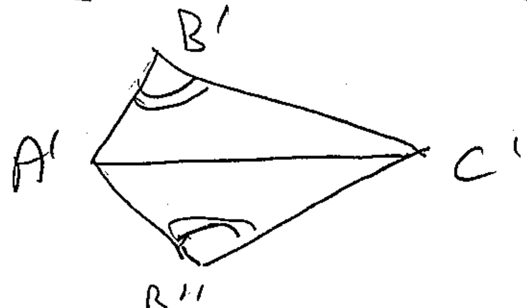
Por LAL, $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C'$. Desenhamos $B'B''$.



$\triangle A'B'B''$ e Isoceles!

Então pela Prop., $\angle A'B'B'' \cong \angle A'B''B'$. 6

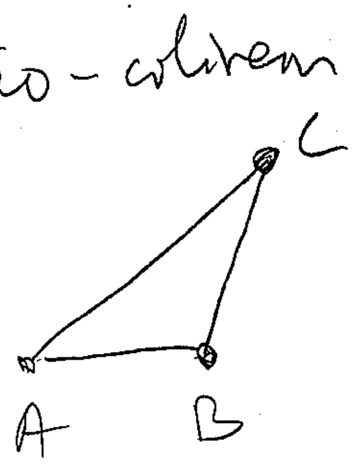
Também, $\Delta B'B''C'$ é isoceles.
Daí, $\angle B''B'C' \cong \angle B'B''C'$.
Pela Prop. de Somatório de Angulos,
$\angle A'B'C' \cong \angle A'B''C'$.



Por LAL, $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B''C'$ $\cong \Delta ABC$. Por transitividade,

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. //

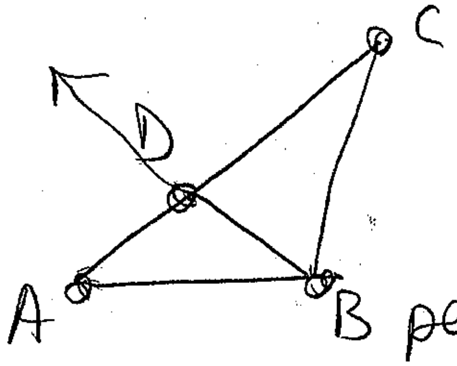
<u>Prop.</u> (Existencia de triangulos isoceles).
Dado um segmento $\overline{AB}$, existe D
tal que ΔABD é isoceles.
<u>Prova.</u> Por I3, ∃ um ponto C
não-colinear com A, B. Se $\angle CAB \cong \angle CBA$,



o triangulo é isoceles já.
Caso digamos $\angle CAB < \angle CBA$,
(utilizando trichotomia)

então $\exists\ \overrightarrow{DB}$ no interior de $\angle CBA$

com $\angle DBA \cong \angle CAB$:



Pela teorema da Barra Cruzada, podemos pegar D com $A * D * C$.

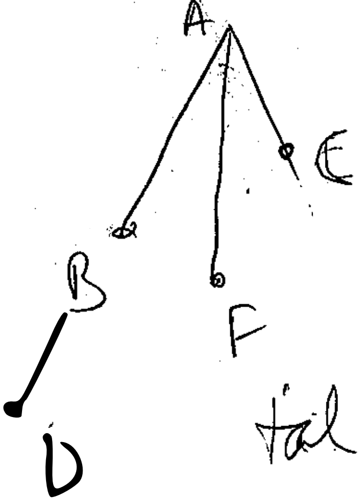
Triângulo $\triangle ADB$ tem $\angle DAB \cong \angle DBA$

então pela Prop, é isosceles //

<u>Prop</u> (bisetriz de um angulo)

Dado $\angle BAC$, existe uma única semireta $\overrightarrow{AF}$ no interior do $\angle BAC$ tal que

$\angle BAF \cong \angle CAF$.

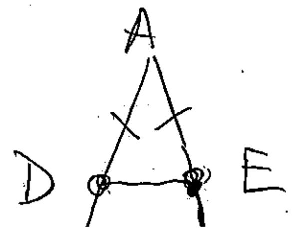


<u>Prova</u>: Por (B3), $\exists$ D com

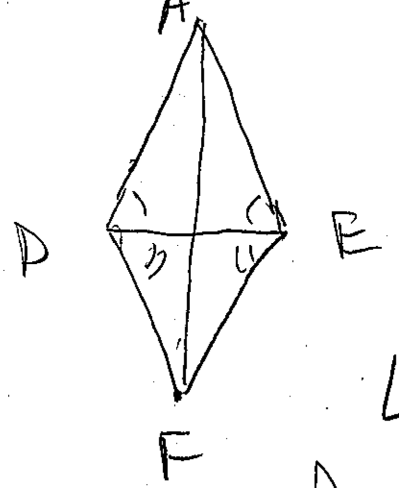
; Por (C1), existe

E na semireta $\overrightarrow{AC}$

tal que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$.



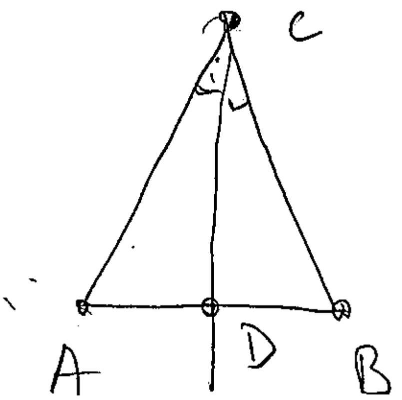
Pela Prop. anterior, podemos construir um triangulo isosceles $\triangle DEF$ com base $\overline{DE}$. Pela somatório de angulo, $\angle ADF \cong \angle AEF$.



Pelo LAL, $\triangle ADF \cong \triangle AEF$. Ou, mais direto, pelo LÂL, $\triangle ADF \cong \triangle AEF$. Daí, $\angle DAF \cong \angle EAF$, pois (os correspondentes lados e angulos são congruentes. //

<u>Prop (I-10 Euclides)</u> Dado $\overline{AB}$, $\exists D$ com $A * D * B$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ (podemos bisetar um segmento).

<u>Prova:</u> Construindo um isosceles, depois pegamos o bisetriz do angulo:

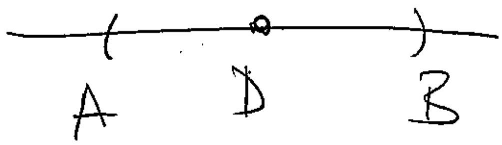


pela teorema da Barra Cruzada, temos $D \in \overline{AB}$. Por LAL, $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.

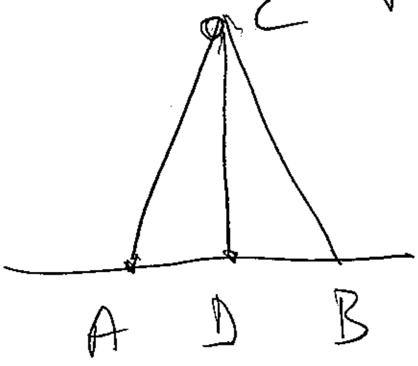
Daí, $\overline{AD} \cong \overline{DB}$. //

<u>Prop</u> (I,11 Euclides) Dado uma reta e um ponto na reta, exibite um perpendicular passando pelo ponto.

<u>Prova</u>:



marcamos um ponto $A \neq D$ na reta e depois B <u>no</u> outro lado tal que $\overline{AD} \cong \overline{DB}$. Construímos um triângulo isosceles com base AB,



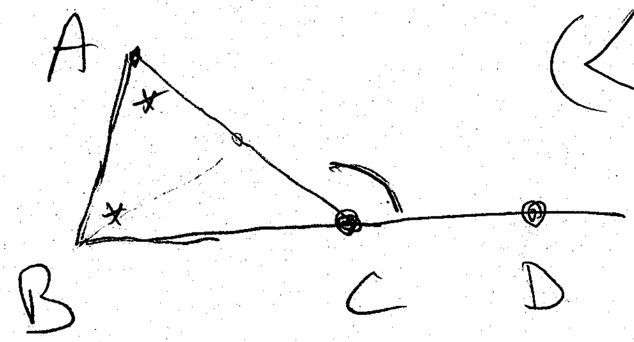
Daí; $\angle CAB \cong \angle CBA$, $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ e $\overline{AD} \cong \overline{DB}$. Por LAL, $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.

Então $\angle CDB \cong \angle CDA$.

Mas eles são suplementares e congruentes, então retos pela definição.//

$\boxed{\text{I.12}}$ Exercício: Dado uma reta r e um ponto C fora da reta, mostre que $\exists$ um perpendicular ao r que passe por C!

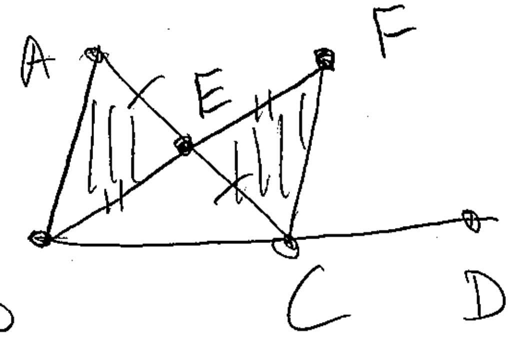
Prop. (Teorema dos Ângulos Exteriores, I.16) Dado um triângulo $\triangle ABC$, os ângulos exteriores são maior que quaisquer um dos ângulos opostos interiores. Isto é,



$(\angle ACD) > (\angle CAB)$

e $(\angle ACD) > (CBA)$.

Prova: Bisetamos $\overline{AC}$ com ponto E, depois construímos ponto F na semirreta $\overrightarrow{BE}$, tal que $\overline{BE} \cong \overline{EF}$ e $B * E * F$.

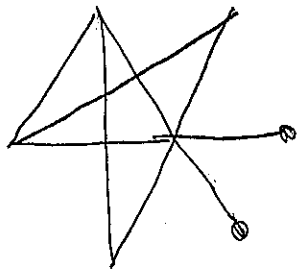


Por LAL, sendo que $(\angle AEB) \cong (\angle CEF)$ (são verticais), $\triangle ABE \cong \triangle CEF$.

Daí, o angulo interior $\angle BAE \cong \angle FCE$.

Afirmamos que $\overrightarrow{CF}$ está no interior do $\angle ACD$, que vai terminar a prova. Mas $C * E * A$ então para $r =$ reta(B, D), $A \overset{r}{\sim} E$. E $B * E * F$, então $E \overset{r}{\sim} F$. Daí, $F \overset{r}{\sim} A$. Para $l =$ reta(A, C), $B * C * D$ e $B * E * F$, daí $B \overset{l}{\not\sim} F$ e $B \overset{l}{\not\sim} D$, então $F \overset{l}{\sim} D$, provando que $\overrightarrow{CF}$ está no interior. //

Exercício: Prova o mesmo para o outro ângulo interior!

(DICA: )