VII no mesmo lado do ponto C (12)

na reta: $D \overset{C}{\sim} E$. No primeiro caso, $\overline{CD} < \overline{AB}$; no segundo, $\overline{AB} < \overline{CD}$. //

(**) Utilizamos na prova a seguinte

Exercício: Se $A * B * C$ e $A * C * D$

então também vale $A * B * D$.

Isto faz parte do seguinte exercício:
(ASSUMINDO I1,2,3 B1,2,3,4)

Exer. 7.1 (Hartshorne)

I. $(A * B * C) \wedge (B * C * D) \Rightarrow$ ① $A * B * D$
② $A * C * D$

II. $(A * B * D) \wedge (B * C * D) \Rightarrow$ ③ $A * B * C$
④ $A * C * D$

(OBS: parte ④ é equivalente ao exercício acima).

DICA: Utilise:

Separação da reta: lembre se: um ponto C numa reta l separe os pontos no $l \setminus \{C\}$ em dois conjuntos S_1 e S_2 não-vazios com $S_1 \cup S_2 = l \setminus \{C\}$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. S_1, S_2 são as classes de equivalência onde $A \overset{C}{\sim} B \Leftrightarrow C \notin \overline{AB}$.

OBS: PODE-SE SEMPRE UTILIZAR UM RESULTADO ANTERIOR. 13

Exercício: Mostre que: $A \overset{B}{\not\sim} C \iff A * B * C$.

Resolução de I ①:

Pelo exercício acima, $A * B * C \iff A \overset{B}{\not\sim} C$.

$B * C * D \Rightarrow C \overset{B}{\sim} D$ (não $\iff$!)

e $A \overset{B}{\not\sim} C$ e $C \overset{B}{\sim} D \Rightarrow A \overset{B}{\not\sim} D \iff A * B * D$. //

Números ②, ③ são parecidos.
Número ④ é um pouco mais envolvido;
(Dica: utilize um resultado anterior!)

Exercício: (7.2 do Harts.) Se $\overline{AB} = \overline{CD}$, mostre que $\{A, B\} = \{C, D\}$.

Então os vértices de um segmento são unicamente definidos.
Dica: mostre que se $C, D \in \overline{AB}$, ... não podemos ter $C * A * D$.

Exercício: Mostre que, numa reta l, $\exists$ pelo menos 5 pontos distintos. Mostre que cada reta contém ∞ pontos (7.4 do Harts). (D...

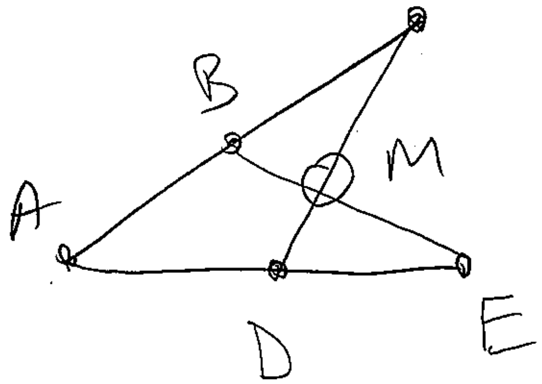
(Dica: ache uma maneira eficiente de provar para $n = 6, 7, 8, \ldots$ e depois, tente utilizar indução.)

Exer. 7.6 Mostre que para quaisquer pontos distintos, $\exists\, C$ tal que $A * C * B$.
(Dica: Utilize I3, B2 e B4!)

Exer. 7.7 ⓐ Dado $A * C * B$, mostre que ① $\overline{AC} \cup \overline{CB} = \overline{AC}$
② $\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$.

(Dica: Nos exercícios, sempre pode-se utilizar uma teorema anterior, incluindo um exercício anterior. Qual exercício anterior vai ajudar aqui?)

7.8. Assumimos que $A * B * C$ numa reta ℓ, e que $A * D * E$ numa reta $\tilde{\ell}$ com $\ell \neq \tilde{\ell}$. Mostre que $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ se encontram num ponto M.



7.9 Mostre que o interior de um triângulo é não-vazio.
(Dica: pode-se utilizar exercícios anteriores, e também a Prop. sobre sep. do plano!!)

7.10 Temos um triângulo $\triangle ABC$, um ponto D no interior, e uma reta ℓ que passe para D. Mostre que ℓ tem que encontrar um dos lados do $\triangle ABC$.
(Dica: gostaríamos utilizar B4, mas como??)

8.1 (a) Dado segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$

Mostre-se que $(\overline{AB} + \overline{CD}) + \overline{EF} = \overline{AB} + (\overline{CD} + \overline{EF})$.

(isto é, estes segmentos são exatamente iguais, não apenas congruentes!)

(b) Mostre-se que dado dois segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ então

$\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{CD} + \overline{AB}$.

8.2 Mostre-se: Dado segmentos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, e dado um ponto E com $A * E * B$, e um ponto F com $C * F * D$, então se $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ e $\overline{CF} \cong \overline{FD}$, podemos concluir que

$\overline{AE} \cong \overline{CF}$.

8.3 Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ então $\overline{AB} + \overline{EF} < \overline{CD} + \overline{EF}$

(para quaisquer segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$).

8.4 Deixe r, s duas retas ~~saindo~~ de dois pontos A, B,

① Define uma bijecão $\varphi: r \to s$, ~~tal que~~ φ preserve congruencia de segmentos, isto é, dado X, Y pontos distintos no r, e $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi(Y)$, então $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$. (Dica: como podemos definir φ, isto é, dado $X \in r$, o que deveria ser $X' = \varphi(X)$?)

② Verifique que dado $X, Y, Z \in r$ com $X * Y * Z$, então $X' * Y' * Z'$.

8.5 Dado 2 pontos distintos O, A, definamos o círculo C com centro O e raio $\overline{OA}$ a ser $\{B ; \overline{OB} \cong \overline{OA}\}$.

ⓐ Mostre que qualquer reta l que passe para O encontra C em exatamente dois pontos. (Dica: mostre primeiro que é valido para a reta passando para O, A). ⓑ Mostre que um circulo contem infinitos pontos.