VI Os Axiomas de Congruencia.

Definamos uma relação binario $\cong$ na coleção de todos os segmentos $\{\overline{AB}\}$

<u>Lembre-se</u>: por definição, nosso espaço X satisfaz $I1, 2, 3$ e $B1, 2, 3, 4$; dado $A \neq B$ pontos (elementos do X), $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{C ; A * C * B\}$.

$\boxed{C1}$ Dado $\overline{AB}$, e uma semi-reta s com vertice C, $\exists!\, D \in s$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

$\boxed{C2}$ $\cong$ é uma relação de equivalencia.

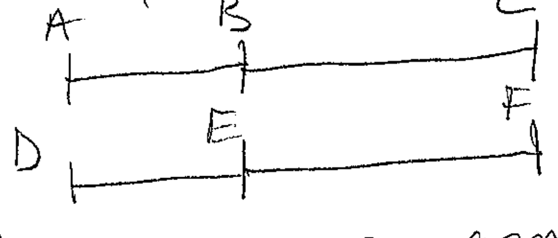
$\boxed{C3}$ ("adição") Dado $A * B * C$ e $D * E * F$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então tambem $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

<u>Comentário</u>: A <u>idea</u> <u>intuitiva</u> de congruencia é que dois segmentos

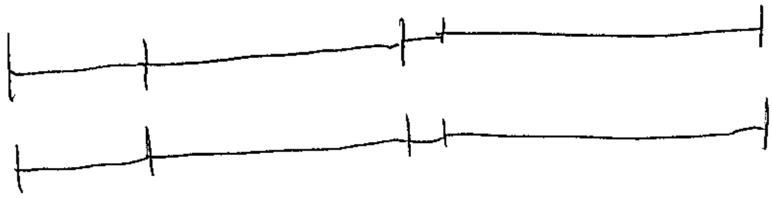
VI são congruentes sse ~~estes~~ eles tem o mesmo tamanho. (Entretanto, os axiomas não utilizem nenhuma ideia dos numeros reais, ou de medir algo com uma regua.) O C1 pode ser interpretado como utilizar um compasso para transferir uma distancia para qualquer outro lugar:

O C2 é claramente desejável para uma noção de "tamanho".

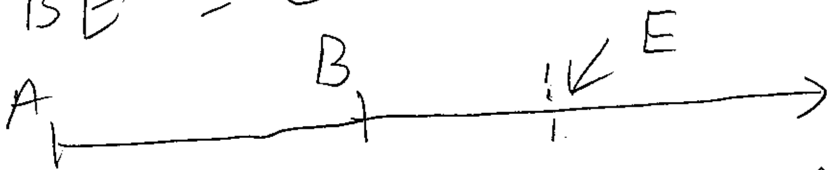
O C3



esta dizendo que, se ambos os partes estão congruentes, também vale para o total. Isto implica o mesmo (por indução) para qualquer divisão de dois segmentos em partinhos:



Def: Dado $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, e a escolha de uma ordem (A, B) no $\{A, B\}$, escrevemos $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE}$, onde (utilizando $\boxed{C1}$) E é a única ponto na semireta $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{BE} = \overline{CD}$:



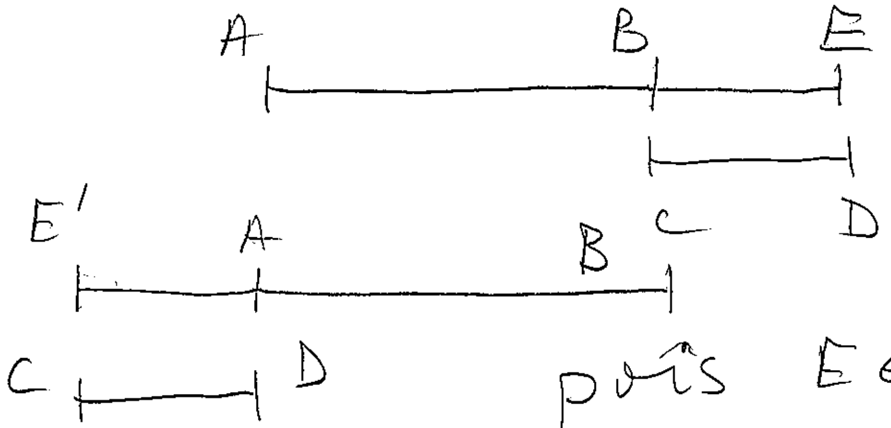
OBS: Temos 2 barras de madeira, azul e verde, de tamanhos diferentes. podemos fazer para "somar" eles, assim: [AZUL | VERDE] ou [Verde | AZUL.]

Claro que os totais são congruentes, embora não iguais:

$$\overline{AB} + \overline{CD} \neq \overline{BA} + \overline{CD},$$

VI

embora $\overline{AB}+\overline{CD} \cong \overline{BA}+\overline{CD}$:



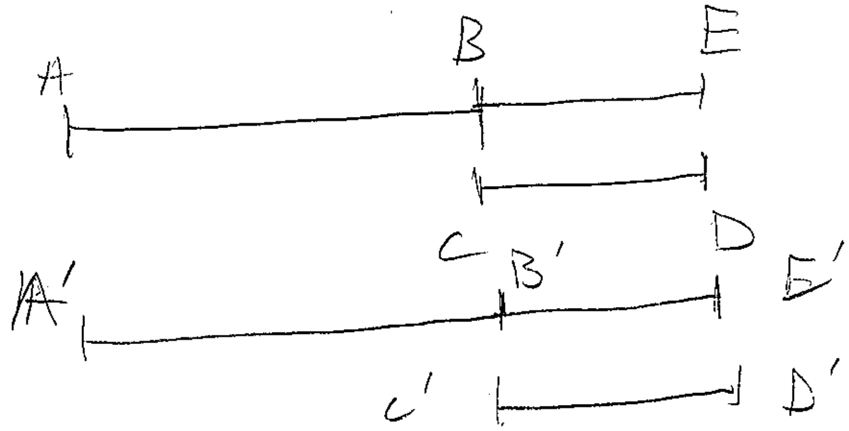
pois $E \in \overrightarrow{AB}$

enquanto $E' \in \overrightarrow{BA}$.

Vamos provar isto com uma consequência da seguinte:

Prop. Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ então $\overline{AB}+\overline{CD} \cong \overline{A'B'}+\overline{C'D'}$.

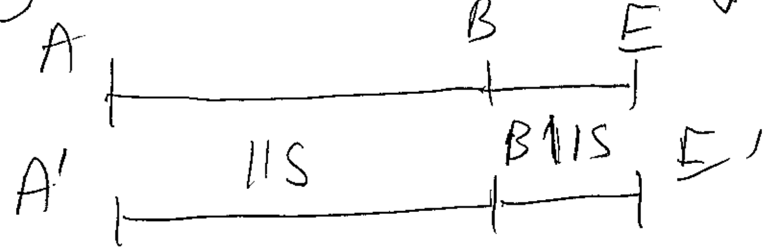
Prova:



Sabemos:
$$\begin{array}{ccc}\overline{CD} & \cong & \overline{C'D'} \\ \| S & & \| S \\ \overline{BE} & & \overline{B'E'}\end{array}$$
então

por transitividade (C2) $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$.

VI Estamos na seguinte situação: 5



agora com $A * B * E$, $A' * B' * E'$

Aplicando $\boxed{C3}$, ~~temos~~ também

$\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$. //

<u>Cor</u>: $\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{BA} + \overline{CD}$:

$\overline{AB} = \overline{BA}$ (por def. de segmento, utilizando $\boxed{B1}$),

e sendo que $\cong$ é uma relação definida na coleção de segmentos, $\overline{AB} = \overline{BA} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BA}$ (utilizando $\boxed{C2}$). Daí, pela proposição, a afirmação é verdadeira. //

VI

OBS: Escrevendo $\langle \overline{AB} \rangle = \{ \overline{A'B'} : \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \}$, a classe de equivalencia do segmento $\overline{AB}$, então a seguinte operação é **bem-definida**:

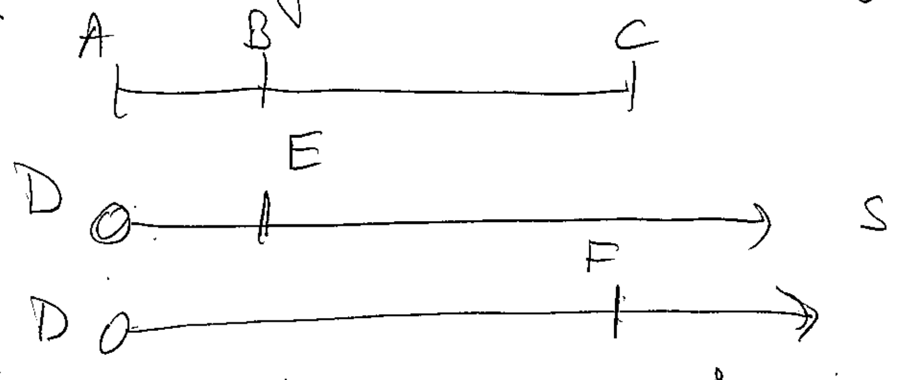
$$\langle \overline{AB} \rangle + \langle \overline{CD} \rangle = \langle \overline{AB} + \overline{CD} \rangle.$$

("bem-definida" quer dizer que não depende da representante da classe de equivalencia utilizada na definição).

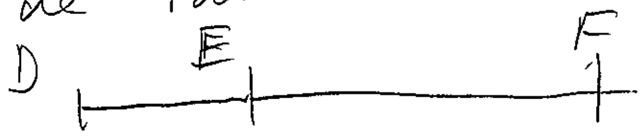
Prop ("subtração") Dado $A * B * C$, e dado uma semi-reta s com vertice D, e $E, F \in D$, então se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então ① $D * E * F$ e ② $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

VI O significado é que,

Se temos



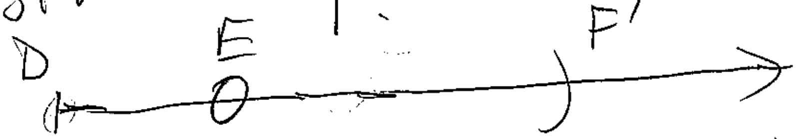
então de fato temos:



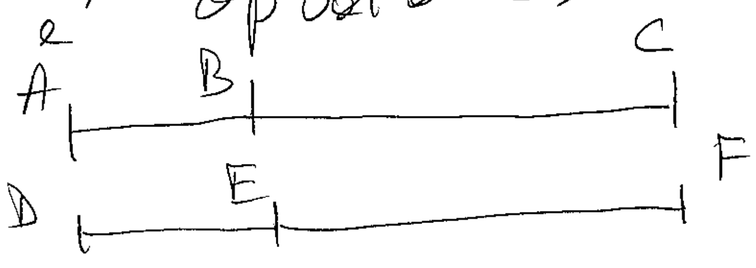
com $D * E * F$ (em esta ordem) e com os segmentos partes também congruentes, (como "deveria ser").

<u>Prova:</u> Utilizando $\boxed{C1}$,

marcamos um ponto F' na semi-reta r com vertice E, no lado oposto do ponto D; com $\overline{EF'} \cong \overline{BC}$:



Então temos $D * E * F'$ (pois $F' \in r$ e r é oposto D). Temos:



então

VI então por $\boxed{C3}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF'}$. (Podemos também utilizar a proposição anterior, mas não é necessário!!) Afirmamos que

$F, F' \in s$ (a semi-reta com vértice D);

pois $D * E * F'$ (então $E \overset{D}{\sim} F'$) e $F \in s$ (pelo jeito que escolhemos este ponto). Daí, $\overline{DF} \cong \overline{AC} \cong \overline{DF'}$, então por $\boxed{C2}$ (transitividade), $\overline{DF} \cong \overline{DF'}$; pela unicidade no $\boxed{C1}$, isto implica $F = F'$ (nota que utilizamos aqui o fato que F, F' estão na semi-reta s).

Daí, $D * E * F$ e $\overline{EF} = \overline{EF'} \cong \overline{BC}$. //

VI

<u>exercício</u>: Verifique se, se temos $A * B * C$, então $\overline{AB} \not\cong \overline{AC}$.

<u>Solução</u>: por Definição, A, B, C são pontos distintos. Por $\boxed{C1}$, $\exists!$ ponto E na semireta $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AE} = \overline{AB}$. Daí, $E = B$. Pelo mesmo argumento, $\exists!$ ponto E' no $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AE'} = \overline{AC}$, e $E' = C$. Mas, sendo que $\overline{AC} = \overline{AB}$, segue que $B = C$, uma contradição. //

<u>Def</u>: Dado dois <u>segmentos</u> $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, escrevemos $\overline{AB} < \overline{CD}$ sse na semireta $\overrightarrow{CD}$ existe E com $C * E * D$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

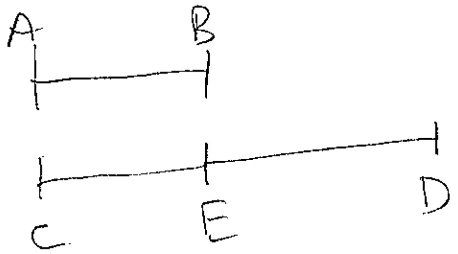
VII

Prop. (a) Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ então $\overline{AB} < \overline{CD} \iff \overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.

(b) $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} < \overline{EF}$

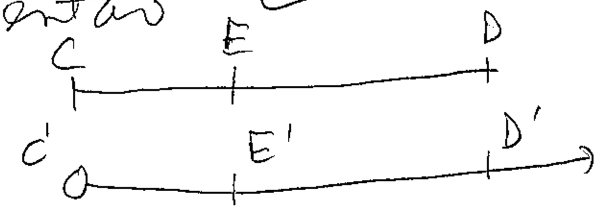
(c) (trichotomia) Dado $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, exatamente um destes três possibilidades é válido:
$\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ou $\overline{CD} < \overline{AB}$.

Prova (a): Dado $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\exists$ E com $A * E * B$ tal que $\overline{AB} \cong CE$.

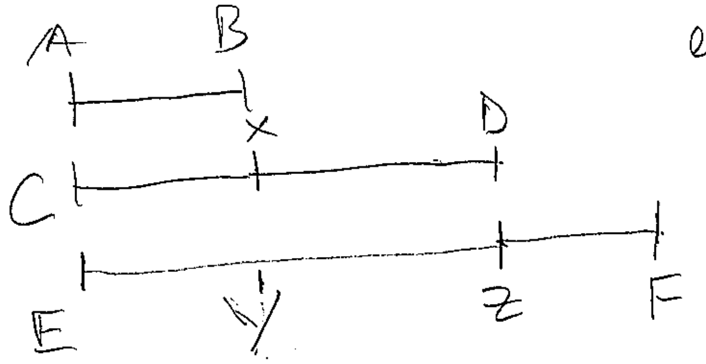


Utilizando $\boxed{C1}$, $\exists !$ ponto E' na semireta $\overrightarrow{C'D'} = S$ tal que $\overline{C'E'} \cong \overline{CE}$.

Temos dois pontos na semireta S: E' e D'. Pela proposição de subtração, temos $C * E * D$ e $E', D' \in S$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, então $C' * E' * D'$. (e também $\overline{ED} \cong \overline{E'D'}$, mas não precisamos isto). Daí, $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$. //



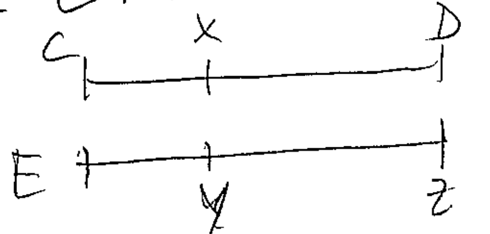
$\boxed{\text{VII}}$ (b) Dado $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF}$.



então existe X, Z com $C * X * D$ e $E * Z * F$

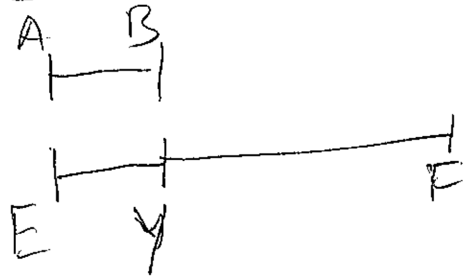
tal que $\overline{AB} \cong \overline{CX}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EZ}$.

Por $\boxed{C1}$ $\exists!$ ponto Y na semi-reta $\overrightarrow{EF}$ tal que $\overline{EY} \cong \overline{CX}$. Utilizando a Prop. de Subtração,



temos $E * Y * Z$.

Afirmo que $E * Y * F$. (Veja exercício (**) abaixo). Então $\overline{AB} \cong \overline{EY}$ com $E * Y * F$



daí $\overline{AB} < \overline{EF}$. //

(c) Dado $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, definimos E (utilizando $\boxed{C1}$) a ser o ponto único tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. Se $E = D$, então $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Caso não, temos 3 pontos C, D, E na semi-reta $\overrightarrow{CD}$. Por $\boxed{B3}$, ou $C * D * E$ ou $C * E * D$; a opção $D * C * E$ é impossível pois D, E estão

VII no mesmo lado do ponto C (12)

na reta: $D \overset{C}{\sim} E$. No primeiro caso,

$\overline{CD} < \overline{AB}$; no segundo, $\overline{AB} < \overline{CD}$. //

(**) Utilizamos na prova a seguinte

Exercício: Se $A * B * C$ e $A * C * D$

então também vale $A * B * D$.