Como ler Euclides

Ricardo Bianconi

1 Introdução

A Geometria tem sua inspiração nas percepções visuais de formas, mas desde os gregos antigos tem sido objeto de uma abstração constante, até chegarmos ao presente, em que essa percepção se desvinculou do desenvolvimento teórico da matéria. É claro que ainda fazemos desenhos para ajudar nossa inspiração, ou mesmo mpara acompanhar a lógica de uma demonstração, sem nos perdermos em meio a uma notação nada amigável.

O grande clássico da Geometria ainda é a obra *Elementos* de Euclides, compilada por volta do quarto século A.C., considerada hoje, ao mesmo tempo, elegante e problemática. A elegância está presente na fineza das argumentações e na organização da seqüência de proposições. É também uma obra problemática, pois parte do princípio que devemos explicitar as propriedades mais básicas do objeto de estudo (os postulados e definições), entretanto faz uso de propriedades não postuladas. Mais precisamente, duas propriedades requerem postulação, como foi descoberto pelo matemático alemão Moritz Pasch (*Curso sobre Geometria Moderna*, [2]), e desenvolvido por David Hilbert, (*Os Fundamentos da Geometria*), [1].

Exporemos a seguir as 28 primeiras proposições do primeiro livro dos *Elementos* de Euclides. Essas proposições não fazem uso do postulado das paralelas e, portanto, sabemos hoje que são válidas também na Geometria Hiperbólica.

Para referência mais fácil, reproduzimos aqui a lista de postulados.

POSTULADOS:

1. Dados pontos $P \neq Q$, existe uma única reta r, tal que $P \cdot\mathrm{I}\cdot r$ e $Q \cdot\mathrm{I}\cdot r$.

2. Dados pontos P, Q e R não colineares, existe um único plano π, tal que $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$, $Q \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $R \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$.

3. Dados dois planos distintos π e ρ, se existir um ponto P, tal que $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $P \cdot \mathrm{I} \cdot \rho$, então existe uma única reta r, tal que $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $r \cdot \mathrm{I} \cdot \rho$.

4. Para todo ponto P, toda reta r e todo plano π, se $P \cdot \mathrm{I} \cdot r$ e $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$, então $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$.

5. Toda reta contém pelo menos dois pontos; todo plano contém pelo menos três pontos não colineares. Existem pelo menos quatro pontos não coplanares.

6. Se $A - B - C$, então A, B e C são colineares e dois a dois distintos.

7. Se $A - B - C$, então $C - B - A$.

8. Dados $B \neq D$, existem $A, C, E \in r_{BD}$ tais que $A - B - D$, $B - C - D$ e $B - D - E$.

9. Dados os pontos A, B e C, pontos distintos e incidentes a uma mesma reta r, então exatamente uma das relações $A - B - C$, ou $A - C - B$ ou $B - A - C$ é verdadeira.

10. (Pasch) Dados os pontos A, B, e C não colineares e uma linha r no plano π_{ABC} (isto é, $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi_{ABC}$), distinta da reta r_{AB}, se $D \in r$ é um ponto tal que $A - D - B$, então ou r intersecta $\overline{AC}$ ou r intersecta $\overline{BC}$ (ou seja, existe um ponto $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi_{ABC}$, tal que, ou $P = C$, ou $A - P - C$ ou $B - P - C$.

11. Dados dois pontos distintos P e Q e uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$, existe um único ponto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$.

12. Dados A, B, C, D, E e F, temos $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ e, se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$.

13. Se $A - B - C$, $P - Q - R$, $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$.

14. Dados o ângulo $\angle AOB$, uma semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ e um dos lados H_1 de r_{PQ} num plano contendo r_{PQ}, existe uma única semi-reta $\overrightarrow{PR}$ tal que $R \in H_1$ e $\angle AOB \equiv \angle RPQ$.

15. Dados os ângulos $\angle ABC$, $\angle DEF$ e $\angle GHI$, temos $\angle ABC \equiv \angle ABC$ e, se $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle ABC \equiv \angle GHI$, então $\angle DEF \equiv \angle GHI$.

16. (LAL) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

18. (Continuidade) Dada uma linha r, suponha que X e Y são conjuntos não vazios de pontos de r, tais que $X \cap Y = \varnothing$, $X \cup Y = r$, e para todos os pontos $A, B, C \in r$, se $A - B - C$ e $A, C \in X$ então $B \in X$ e se $A - B - C$ e $A, C \in Y$, então $B \in Y$. Então, neste caso, existe um ponto $O \in r$ e semi-retas opostas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, tais que $A - O - B$, $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{OA}) \subset X$, $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{OB}) \subset Y$ e $O \in X$ ou $O \in Y$.

Observe que podemos reescrever esse postulado usando apenas segmentos no lugar das retas. (Exercício: faça-o.)

2 O Livro I

Suporemos os postulados da geometria neutra, com o postulado da continuidade. Como Euclides e, posteriormente Saccheri (o próximo assunto), assumiram implicitamente resultados que dependem do postulado da continuidade, precisamos torná-los explícitos para uso posterior.

2.1 Preliminares sobre a Continuidade

Comecemos com a primeira proposição de Euclides, em que ele fez uso implícito do postulado da continuidade. Para isso, consideremos primeiramente a seguinte proposição.

Assumimos aqui que tudo ocorre em um dado plano π.

Proposição 1 Dado o segmento $\overline{AB}$, existe um ponto M, tal que $A-M-B$ e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. Ou seja, dado um segmento, existe o seu ponto médio.

Demonstração: Seja $X = \{P \in \overline{AB} : P = A \text{ ou } \overline{AP} < \overline{PB}\}$ e $X = \{Q \in \overline{AB} : Q = B \text{ ou } \overline{AQ} > \overline{QB}\}$. Então $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$. Além disso, se $P \neq A$ e $P \in X$, existe (um único) $Q \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AP} \equiv \overline{QB}$, e vice-versa. Isso quer dizer que se $P_1, P_2 \in X$ são dois pontos distintos, não existe nenhum ponto $Q \in Y$, que satisfaça $P_1 - Q - P_2$, e se $Q_1, Q_2 \in Y$ são dois pontos distintos, não existe nenhum ponto $P \in X$, que satisfaça $Q_1 - P - Q_2$. Pelo postulado da continuidade, obtemos o ponto $M \in \overline{AB}$, tal que, para todo $P \in X$ e $Q@ \in Y$, vale que $P - M - Q$. Das definições de X e Y, temos que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. $\square$

Proposição 2 ***(Livro I. Prop. 15)***Dados os pontos A, B, C, D e O, tais que $A - O - C$, $B - O - D$ e $\ell_{AC} \neq \ell_{BD}$, então $\angle AOB \equiv \angle COD$.

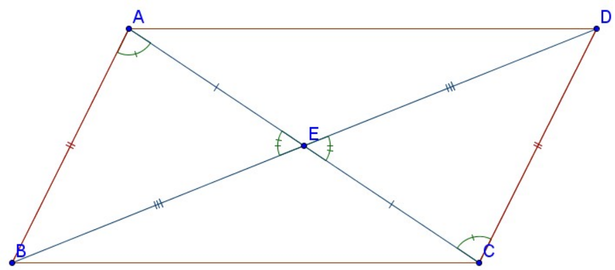


Figura 1: Proposição 15: ângulos opostos pelo vértice.

Demonstração: Primeiramente observemos que, dado o quadrilátero (convexo) $ABCD$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\angle BAC \equiv \angle ACD$, então suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ cruzam-se em seu ponto médio E. Isto decorre do postulado de Pasch e de LAL (detalhar esse argumento: considere $\triangle BAC$, $\triangle DCA$; depois ALA com $\triangle ABE$ e $\triangle DEC$). A seguir, aplicamos esse resultado à proposição a ser demonstrada: escolhendo e renomeando novos pontos se necessário, poderemos assumir que $\overline{AO} \equiv \sec OC$; escolhendo um ponto B' oposto a D em relação à reta ℓ_{AC} e de modo que $\overline{AB'} \equiv \overline{CD}$ e $\angle OAB' \equiv \angle OCD$, temos que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{B'D}$ encontram-se em seu ponto médio, que é o ponto O; como $\ell_{DB'}$ e ℓDB têm dois pontos distinjtos em comum (os pontos D e O), temos que $B' \in \ell DB$ e, portanto $\angle AOB \equiv \angle COD$. $\square$

Proposição 3 ***Livro I. Prop. 16)***Dados o triângulo $\triangle ABC$ e o ponto F, tal que $A - C - F$, então $\angle BCF > \angle ABC$ e $\angle BCF > \angle BAC$.

Demonstração: Mostremos primeiramente que $\angle BCF > \angle ABC$. Para isso, seja E o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e seja D, tal que $A - E - D$ e $\overline{AE} \equiv \overline{DE}$. Por LAL e Proposição 15 de Euclides, $\triangle ABE \equiv \triangle DCE$ e, portanto $\angle ABC \equiv \angle DCE$. Como o ponto D está no interior do ângulo $\angle BCF$, temos que $\angle BCF > \angle ABC$.

Agora passemos à segunda desigualdade. Para isso, seja E o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ e seja D, tal que $B - E - D$ e $\overline{BE} \equiv \overline{DE}$. Por LAL e

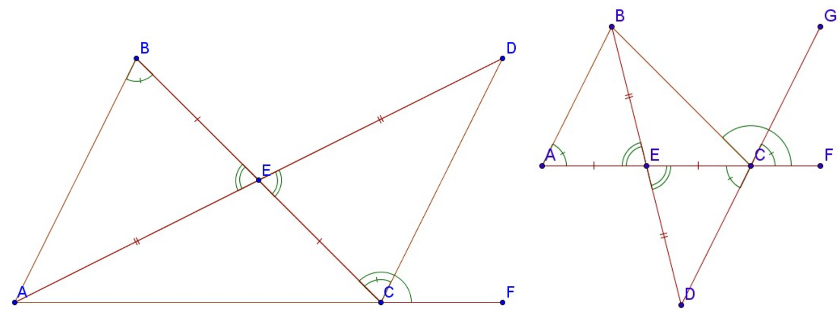


Figura 2: Proposição 16.

Proposição 15 de Euclides, $\triangle ABE \equiv \triangle CDE$ e, portanto $\angle BAC \equiv \angle DCE$. Seja G, tal que $D - C - G$. Pela Proposição 15, $\angle GCF \equiv \angle DCE$ e, como G está no interior do ângulo $\angle BCF$, obtemos a desigualdade desejada. $\square$

Proposição 4 ***(Livro I. Prop. 18-19)***Dado o triângulo $\triangle ABC$, temos que $\overline{AB} < \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle ACB < \angle ABC$.

Demonstração: Suponhamos que $\overline{AB} < \overline{AC}$. Seja $D \in \overline{AC}$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$. Por LAL, $\triangle ABD \equiv \triangle ADB$. Daí, $\angle ABD \equiv \angle ADB$. Como D está no interior do ângulo $\angle ABC$, temos $\angle ABC > \angle ABD$. pela Proposição 16 de Euclides, $\angle ADB > \angle ACB$. Juntando tudo, temos que $\angle ABC > \angle ACB$.

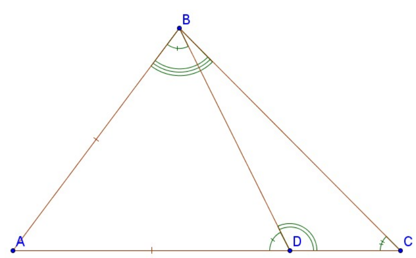
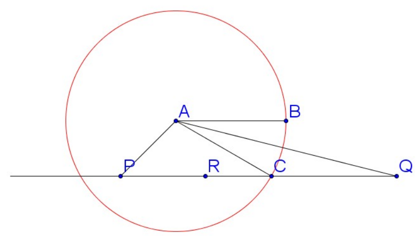


Figura 3: Proposição 18.

Para a recíproca, suponhamos que $\angle ABC > \angle ACB$. Se tivéssemos $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, teríamos por LAL que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ e, portanto $\angle ABC \equiv \angle ACB$, contrário à hiótese. Se tivéssemos $\overline{AB} > \overline{AC}$, pela primeira parte desta demonstração teríamos que $\angle ABC < \angle ACB$, novamente contrário à hipótese. Assim, só podemos ter que $\overline{AB} < \overline{AC}$. $\square$

Proposição 5 Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta ℓ, tal que exista $P.I.\ell$, tal que $\overline{AP} < \overline{AB}$, então existe um ponto $C.I.\ell$, tal que $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$. Ou seja, se a reta ℓ contiver um ponto no interior da circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$, então terá um ponto da circunferência.



Demonstração: Se $A, B.I.\ell$, então B já satisfaz o enunciado. Se $A.I.\ell$, mas $B. \not I.\ell$, o postulado 11 garante a existência do ponto $C.I.\ell$ na circunferência. Assumiremos então que nem A e nem B sejam pontos de ℓ. Aqui usaremos o postulado da continuidade. Escolhamos uma semi-reta $\overrightarrow{PR}$, com $R \in \ell$. Sejam $X = \{Q \in \overrightarrow{PR} : \overline{AQ} < \overline{AB}\}$ e $Y = \{Q \in \overrightarrow{PR} : \overline{AQ} > \overline{AB}\}$. Como $P \in X$, temos que $X \neq \varnothing$. Para mostrarmos que $Y \neq \varnothing$, basta construir triângulos convenientes (exercício). Observe que $X \cap Y = \varnothing$. Sejam $P_1, P_2 \in X$ dois pontos distintos e $Q.I.\ell$, tal que $P_1 - Q - P_2$. Então $Q \in X$ (comparar ângulos nos triângulos $\triangle AP_1Q$, $\triangle AQP_2$ e $\triangle AP_1P_2$; concluir que ou $\overline{AQ} < \overline{AP_1}$, ou $\overline{AQ} < \overline{AP_2}$, ou $\overline{AQ} \equiv \overline{AP_1}$, ou $\overline{AQ} \equiv \overline{AP_2}$). Por argumento análogo, concluímos que se $Q_1, Q_2 \in Y$ e $Q_1 - P - Q_2$, então $Q \in Y$. Pelo postulado da continuidade, obtemos o ponto $C.I.\ell$ que satisfaz $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$. $\square$

Proposição 6 Dada uma reta ℓ e um ponto $F.I.\ell$, então existe uma reta $\ell' \perp \ell$ (perpendicular), tal que $F.I.\ell$.

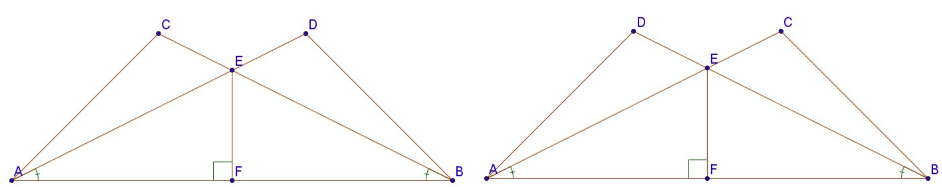
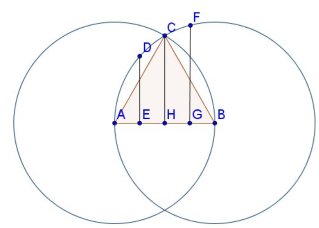


Figura 4: Existência de perpendiculares.

Demonstração: Sejam $A, B.I.\ell$, tal que $A - F - B$ e $\overline{AF} \equiv \overline{FB}$. Seja C um ponto (do plano π em que estamos trabalhando) tal que $C. \not I.\ell$. Se $\angle ABC \equiv \angle ACB$, por LAL nos triângulos $\triangle AFC$ e $\triangle BFC$, obtemos que $\ell_{CF} \perp \ell$. Caso $\angle ABC \not\equiv \angle ACB$, seja D em π, no mesmo semiplano de C (em relação à reta ℓ) e tal que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Pelo postulado de Pasch, ou $\overline{AC}$

cruza $\overline{BD}$, ou $\overline{AD}$ cruza $\overline{BC}$. Seja E tal ponto. Por LAL nos triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle BDE$ (ou $\triangle ADE$ e $\triangle BCE$, no segundo caso) e, a seguir, nos triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle BEF$, temos que $\overline{EF} \perp \ell$. $\square$

Proposição 7 ***(Livro I. Prop. 1)***Dado um segmento $\overline{AB}$, existe um triângulo equilátero de lado $\overline{AB}$.



Demonstração: A ideia é traçar duas circunferências, uma de centro A e raio $\overline{AB}$ e outra de centro B e raio $\overline{BA} = \overline{AB}$, *tomando o ponto C da interseção das duas*. Nos *Elementos*, Euclides já assume sem menção explícita que essas circunferências têm pontos em comum. No entanto, temos que mostrar que existem tais pontos, o que fazemos com uso essencial do Postulado da Continuidade. Sejam $X = \{P \in \ell_{AB}$: existe Q, tal que $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{QA} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{QB} < \overline{AB}\}$, $Y = \{P \in \ell_{AB}$: existe Q, tal que $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{QA} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{QB} > \overline{AB}\}$. Usando a proposição anterior, se M for o ponto médio de $\overline{AB}$, então existe C, tal que $\overline{PC} \perp \overline{AB}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{AB}$. $\square$

2.2 Proposições 5 a 28

As duas próximas proposições tratam de triângulos isósceles, trazendo resultados importantes para uso posterior.

A Proposição 5 já foi demonstrada no meio de uma demonstração anterior, mas repetimo-la aqui para ficar registrada sua presença. O triângulo isósceles, caracterizado pelas duas próximas proposições, será ferramenta essencial nas argumentações feitas a seguir.

Proposição 8 ***(Livro I. Prop. 5)***Dado o triângulo $\triangle ABC$, se $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, então $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Sejam D e E dois pontos tais que $A - B - D$ e $A - C - E$. Então $\angle DBC \equiv \angle ECB$.

Demonstração: Neste caso temos duas aplicações do postulado LAL. Como $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, lados adjacentes ao ângulo $\angle BAC = \angle CAB$, temos por LAL que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ e, portanto $\angle ABC \equiv \angle ACB$.

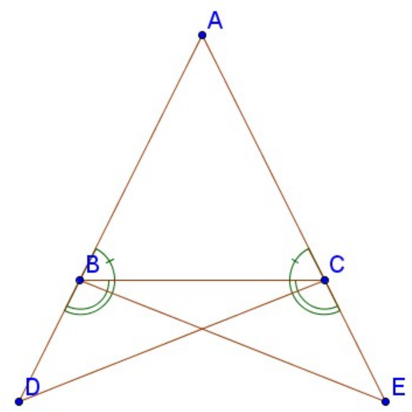


Figura 5: Proposição 5 de Euclides: triângulo isósceles.

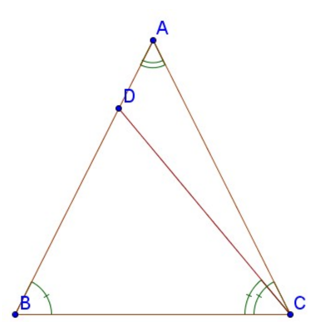
Para a congruência final, podemos assumir que os pontos D e E tenham sido escolhidos de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{AE}$. Novamente por LAL, tamos que $\triangle ABE \equiv \triangle ADB$ e, portanto $\angle ADC \equiv \angle AEB$ e $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$.

Finalmente, por LAL, $\triangle BCE \equiv \triangle CBD$ e, portanto $\angle DBC \equiv \angle ECB$.$\square$

A próxima proposição dá a recíproca deste resultado.

Proposição 9 ***(Livro I. Prop. 6)***Dado o triângulo $\triangle ABC$, se $\angle ABC \equiv \angle ACB$, então $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$.

Demonstração: Esta será demonstrada por contradição.

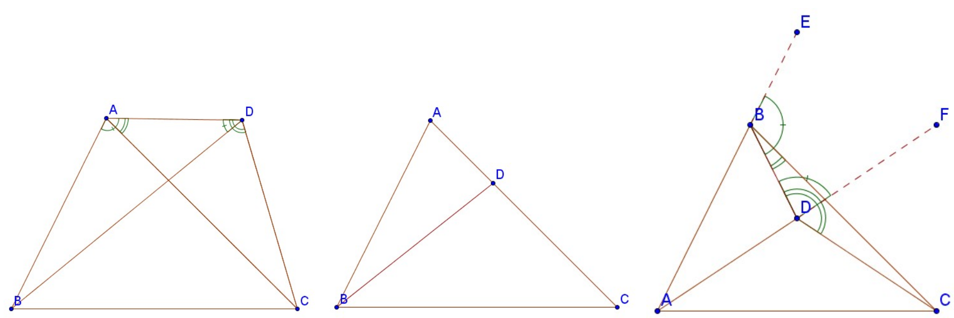


Suponhamos que $\angle ABC \equiv \angle ACB$, mas que $\overline{AB} \not\equiv \overline{AC}$. Podemos supor que $\overline{AB} > \overline{AC}$, sendo que o caso $\overline{AC} > \overline{AB}$ é análogo. Assim, existe um ponto D, tal que $A - D - B$ e $\overline{BD} \equiv \overline{AC}$. Pelo postulado LAL, $\triangle DBC \equiv \triangle ACB$. Mas isso implica que $\angle ABC \equiv \angle DCB$. No entanto, o ponto D está no interior do ângulo $\angle ACB$ e, portanto $\angle DCB < \angle ACB$. Isto contradiz o fato que $\angle DCB \equiv \angle ABC \equiv \angle ACB$. $\square$

Passemos agora ao critério *Lado-Lado-Lado*, ou LLL.

Proposição 10 ***(Livro I. Prop. 7-8: LLL)*** Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Demonstração: Vamos demonstrar essa proposição por contradição. Suponhamos que existam triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$. Para que isso ocorra, devemos ter que nenhum dos ângulos do triângulo $\triangle ABC$ possa ser congruente ao correspondente no triângulo $\triangle DEF$. Suponhamos então que $\angle ABC > \angle DEF$, sendo que o caso $\angle ABC < \angle DEF$ é análogo. Para facilitar, assumiremos que $E = B$ e $f = C$ e que os pontos D e A estão no mesmo semiplano, em relação à reta ℓ_{BC}. Podemos ter três casos: ou D está no interior do triângulo $\triangle ABC$, ou satisfaz $A - D - C$, ou está no exterior do triângulo $\triangle ABC$.



O caso em que $A - D - C$ é imediatamente descartado, pois neste caso não poderíamos ter $\overline{CD} \equiv \overline{AC}$, em virtude do Postulado 11.

Nos outros dois casos, os triângulo $\triangle BAD$ e $\triangle CAD$ são isósceles. Comparando os ângulos das bases destes triângulos, temos que, no caso de D estar no exterior do triângulo $\triangle ABC$, $\angle BAD > \angle CAD \equiv \angle CDA > \angle ADB \equiv \angle BAD$, uma contradição; no caso em que D esteja no interior do $\triangle ABC$, sejam E e F, tais que $B - A - E$ e $B - D - F$; daí, $\angle DBE > \angle DBC \equiv \angle CDB > \angle BDF$, contradição. $\square$

Proposição 11 ***(Livro I. Prop. 17)*** A soma de dois ângulos internos de um triângulo é sempre menos que dois retos (ou seja, suas medidas têm soma menor que 180°.

Demonstração: Usaremos em cada vértice do triângulo $\triangle ABC$ a construção da demonstração da Proposição 16 de Euclides (a Proposição 3, na página 4). Observe a figura 6 e escreva os detalhes. $\square$

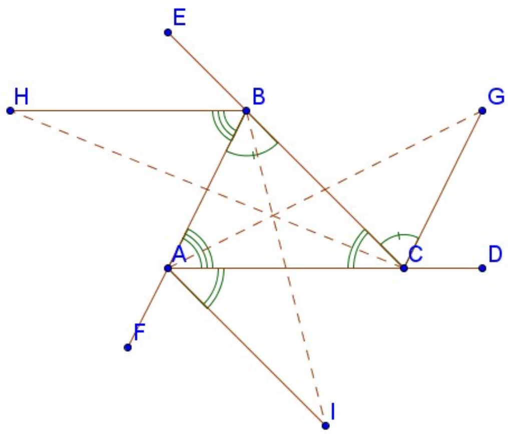


Figura 6: Proposição 17.

Proposição 12 ***(Livro I. Prop. 20 e 22)*** Dados os segmentos $\overline{DE}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$, temos que existe o triângulo $\triangle ABC$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{FG}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{HI}$ se, e somente se valerem as três desigualdades:

1. $\overline{DE} + \overline{FG} > \overline{HI}$;
2. $\overline{DE} + \overline{HI} > \overline{FG}$;
3. $\overline{HI} + \overline{FG} > \overline{DE}$.

Demonstração: Vamos supor que a soma de dois dos degmentos é sempre maior que o terceiro e demonstrar a existência do triângulo. Se todos os segmentos forem congruentes entre si, a Proposição 7, na página 7 resolve o problema. Caso dois deles sejam congruentes entre si e o terceiro não, tomando este como base do triângulo, o terceiro vértice estará na reta perpendicular à base, passando por seu ponto médio (faça os detalhes). Suponhamos, então que os três segmentos tenham tamanhos distintos. Suponhamos que $\overline{DE}$ seja o maior dos segmentos e seja $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$.

Sejam $P, Q \in \overline{AB}$, tais que $\overline{AP} \equiv \overline{FG}$ e $\overline{BQ} \equiv \overline{HI}$. Então $A - Q - P$ e $Q - P - B$. Seja $X = \{I \in \overline{AB}$: existe H, tal que $\overline{BH} \equiv \overline{BQ}$, $\overline{AH} < \overline{AP}$ e $\overline{HI} \perp \overline{AB}\}$ e $Y = \{K \in \overline{AB}$: existe J, tal que $\overline{BJ} \equiv \overline{BQ}$, $\overline{AJ} > \overline{AP}$ e $\overline{JK} \perp \overline{AB}\}$. Esses conjuntos são não vazios e satisfazem as hipóteses do

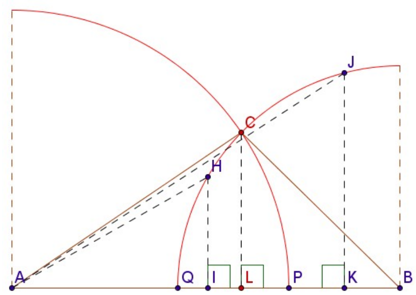


Figura 7: Existe o triângulo.

postulado da continuidade. Seja $L \in \overline{AB}$ o ponto dado pelo postulado, e C, tal que $\overline{BC} \equiv \overline{BQ}$ e $\overline{CL} \perp \overline{AB}$. Então $\overline{AC} \equiv \overline{AP}$.

Agora mostraremos que se uma das desigualdades do enunciado não for satisfeita, não existirá o triângulo correspondente. Para isto, suporemos primeiro que a soma de dois dos lados é congruente ao terceiro. Seja $\overline{AB}$ congruente a esse terceiro segmento.

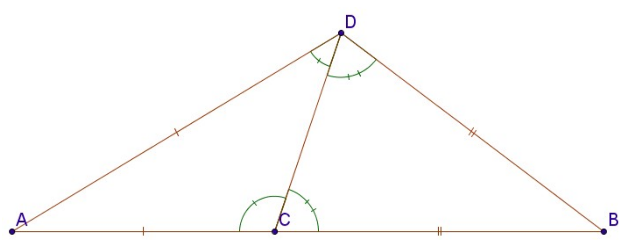


Figura 8: Não existe o triângulo, pois a soma de dois segmentos é igual ao terceiro.

Para isso, suporemos que hajam dois pontos C e D, tais que $A - C - B$ e D. $\not{I}.\ell_{AB}$, satisfazendo $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$. Os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$ são isósceles. Usando a Proposição 3, página 4, temos que $\angle ACD > \angle BDC \equiv \angle BCD > \angle ADC \equiv \angle ACD$, uma contradição. Por isso, não pode existir tal ponto D.

Agora consideremos o caso em que um dos segmentos é maior qua a soma dos outros dois. Suponhamos que $\overline{AB}$ seja congruente ao maior segmmento e sejam $G, H \in \overline{AB}$, tais que $A - G - H$ e $G - H - B$. Mostremos que não existe

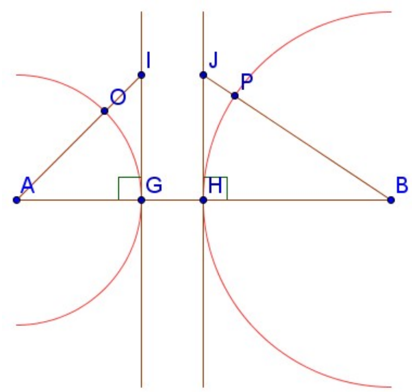


Figura 9: Não existe o triângulo: a soma de dois segmentos é menor que o terceiro.

nenhum ponto Q, tal que $\overline{AQ} \equiv \overline{AG}$ e $\overline{BQ} \equiv \overline{BH}$. Sejam $\ell, \ell' \perp \overline{AB}$, tais que $G.I.\ell$ e $H.I.\ell'$. Se I for um ponto de ℓ, então o tirângulo $\triangle AGI$ é retângulo (em G) e sua hipotenusa $\overline{AI}$ é maior que seu cateto AG e, portanto, existe um único ponto O na semirreta $\overrightarrow{AI}$, tal que $\overline{AO} \equiv \overline{AG}$ e vale $A - O - I$. Todos os pontos do plano que estejam na circunferência de centro A e raio $\overline{AG}$ estão no semiplano oposto ao ponto B em relação à reta ℓ', e analogamente, todos os pontos do plano que estejam na circunferência de centro B e raio $\overline{BH}$ estão no semiplano oposto ao ponto A em relação à reta ℓ. Tais semiplanos são disjuntos e, portanto, essas circunferências não se encontram. $\square$.

Proposição 13 ***(Livro I. Prop. 21)***Dado o triângulo $\triangle ABC$ e o ponto D no interior dele, então $\angle BAC < \angle BDC$.

Demonstração: Seja E, tal que $B - D - E$ e $A - E - C$ (tal ponto existe, devido ao postulado de Pasch). Pela Proposição 3, página 4, aplicada sucessivamente aos triângulos $\triangle CDE$ e $\triangle AEB$, temos que $\angle BDC > \angle BEC > \angle BAC$. $\square$

Proposição 14 ***(Livro I. Prop. 24)***Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, $\overline{AC} \equiv \overline{EG}$, então $\overline{BC} > \overline{FG}$ se, e somente se, $\angle BAC > \angle FEG$.

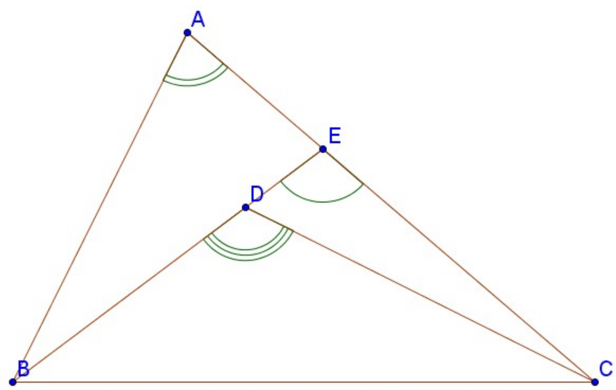


Figura 10: Livro I, Proposição 21.

Demonstração: Suponhamos que $\angle BAC > \angle FEG$. Seja D no interior de $\angle BAC$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$ e $\angle DAC \equiv \angle FEG$. Podem ocorrer três situações: o ponto D pode estar no interior do $\triangle ABC$, em seu lado $\overline{BC}$ ou em seu exterior.

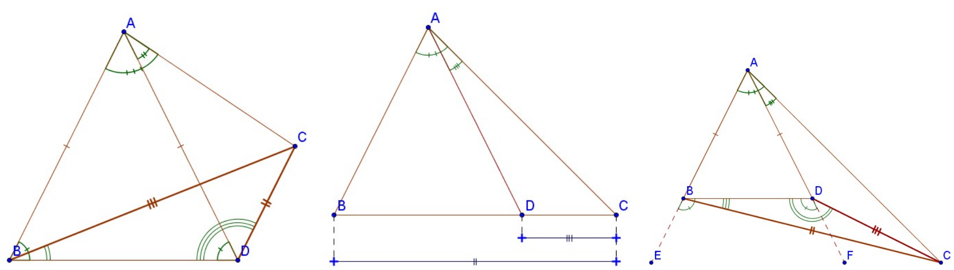


Figura 11: Proposição 24.

Em cada caso, temos que o triângulo $\triangle ABD$ é isósceles, e comparando ângulos e lados opostos, obtemos o desejado (faça os detalhes: veja a Figura 11). Por que a recíproca também segue desse argumento? $\square$

Proposição 15 (Livro I, Prop. 27-28) Dados os pontos A, B, C e D, tais que A e D estejam em semiplanos opostos em relação à reta ℓ_{BC}, e tais que $\angle ABC \equiv \angle BCD$, então ℓ_{AB} e ℓ_{CD} não tê, ponto comum.

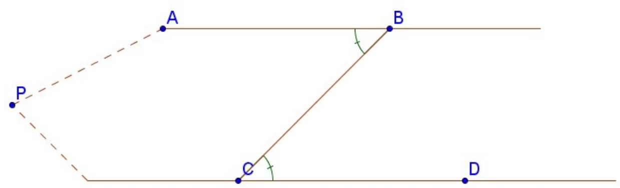


Figura 12: Livro I, Proposições 27-28.

Demonstração: Se houvesse tal ponto P, digamos que esteja no mesmo semiplano que A, teríamos o $\triangle BPC$, com ângulo externo $\angle BCD$ congruente ao interno não adjacente $\angle CBA$, contradizendo a Proposição 3, página 4. $\square$

Referências

[1] David Hilbert, *The Foundations of Geometry*, Open Court Pub. Co., Chicago, EUA, 1902.

[2] Moritz Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Ed. Teubner, Leipzig, 1882.