Capítulo 1

Introdução

1.1 O objeto deste livro

Podemos dizer que a Geometria, como ciência abstrata, surgiu na Antiguidade a partir das intuições acerca do espaço, principalmente do estudo da Astronomia. Nomes como os de Tales de Mileto, Pitágoras, Ptolomeu, Eudoxo, Euclides, Arquimedes, Apolônio, etc, ainda presentes nos livros de geometria atestam a antiguidade do assunto.

Destaca-se, principalmente, na Antiguidade Clássica, o nome de Euclides, que codificou quase todo o conhecimento geométrico da época nos treze livros de seus *Elementos*[1]. O Primeiro Livro dos *Elementos* expõe os fundamentos da geometria, chamada de euclideana, nos seus famosos cinco postulados.

De um ponto de vista atual, mais rigoroso, suas definições das diversas figuras geométricas (ponto, segmento de reta, plano, etc) têm um caráter intuitivo, formalmente desnecessário para seu estudo, e existem lacunas naqueles postulados, que são preenchidas por suposições implícitas nas demonstrações de suas proposições. Apesar disso, é uma obra de admirável elegância e profundidade, que merece sempre ser estudada.

O foco central deste livro é o estudo crítico dessa obra, principalmente com a discussão do famoso quinto postulado[2], analisando as contribuições de

[1] Existe uma boa tradução recente para o português, feita por Irineu Bicudo, publicada pela Editora da UNESP, em 2009.

[2] O postulado das paralelas, que, em Euclides, assume uma forma complexa. Pelo

diversos geômetras que, inadvertidamente, acabaram por descobrir o que hoje chamamos de *Geometria Hiperbólica*, em que não vale o quinto postulado.

Os demais postulados, explicitando-se aqueles implícitos na obra de Euclides, formam o que chamamos de *Geometria Neutra* ou *Geometria Absoluta*, cujas proposições formam o conjunto de conseqüências comuns à Geometria Euclideana e à Geometria Hiperbólica.

O estudo do papel do postulado das paralelas desempenhado nessas duas geometrias atingiu um ápice no trabalho do padre jesuíta italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), que, na tentativa de demonstrar o quinto postulado, descobriu diversos dos resultados iniciais da geometria hiperbólica. Este autor será estudado com detalhes no capítulo sobre a Teoria das Paralelas.

1.2 A Geometria como uma Ciência Dedutiva

Este não é um livro de Lógica Matemática. No entanto, fazem-se necessários alguns comentários acerca do discurso dedutivo, que é o discurso matemático. Vamos discutir algumas regras desse discurso, de modo informal (sem formalismo, mas com rigor).

A linguagem científica procura descrever cada ramo da ciência de modo a produzir asserções (ou frases declarativas - declaram propriedades ou conceitos). Um texto científico – em particular, o matemático – pode ser considerado como um discurso sujeito a algumas regras. As regras que descreveremos a seguir descrevem o que se chama hoje de *Lógica Clássica*.

1.2.1 A Lógica Clássica

Hoje em dia não se pode falar de uma lógica, no singular, para indicar um sistema de princípios e métodos de dedução. Por isso, chamamos a lógica estudada neste texto de *Lógica Clássica* para diferenciá-la das diversas lógicas presentes atualmente. Ela baseia-se em dois princípios fundamentais, já apresentados ao falarmos de Aristóteles:

fato de ser complexo, por uma questão estética ou filosófica, diversos autores, desde a Antiguidade, tentaram sem sucesso deduzi-lo dos outros postulados.

> **Princípio da Não Contradição:** Uma sentença não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

Nem a todas as sentenças podemos atribuir um valor de verdade que faça sentido, pelo menos em matemática. Por exemplo, uma pergunta, uma interjeição, uma ordem. Apenas[3] àquelas sentenças que declaram alguma propriedade acerca de algum objeto faz sentido essa atribuição de valor. Tais sentenças serão chamadas de *proposições*. Para estas, o segundo princípio, que realmente caracteriza fortemente a lógica clássica, limita as possibilidades de velores de verdade.

> **Princípio do Terceiro Excluído:** Uma proposição pode ser somente verdadeira ou falsa. Não há outras possibilidades.

Com isto, separamos o conjunto de proposições em dois conjuntos disjuntos: as verdadeiras e as falsas.

A negação: Essa distribuição de proposições em verdadeiras ou falsas deve satisfazer alguns critérios. O primeiro refere-se à negação. Se uma proposição for verdadeira, sua negação será falsa e se aquela for falsa, sua negação será verdadeira. No entanto, vela mais do que isto: se a negação de uma proposição for verdadeira, então ela será falsa e se sua negação for falsa, então ela será verdadeira. Esta última afirmação distingue a lógica clássica da intuicionista (mais construtiva) e é a base das demonstrações por redução ao absurdo.

Deduções: uma dedução (ou também, demonstração) informal é um discurso realizado na língua portuguesa, eventualmente envolvendo alguns símbolos matemáticos, em que, partindo de certas proposições chamadas de *premissas* ou *hipóteses*, chegando, ao final a uma proposição que será a conclusão da argumentação, satisfazendo a condição de que ela seja verdadeira, se todas as premissas também o forem.

Argumentos Válidos: serão considerados válidos os argumentos (deduções) que tenham uma conclusão considerada verdadeira, mas também aquelas cuja conclusão seja falsa, quando alguma das premissas for falsa.

[3] Existem lógicas, consideradas não clássicas, que estudam tais sentenças. Não serão tratadas aqui.

A implicação: uma implicação é uma proposição da forma *se A, então B*, sendo que A é uma premissa ou hipótese (que pode ser uma proposição bem complexa) e B é uma proposição, a sua conclusão ou tese. A ideia é que uma implicação contenha em si a informação de que das premissas possamos concluir a tese. Assim, se a hipótese for verdadeira, a tese terá que necessariamente ser verdadeira. Demonstrar uma implicação diretamente significa afirmar as premissas e chegar à conclusão. Podemos demonstrá-la também de duas maneiras indiretas:

1. **Contrapositiva:** nega-se a tese, isto é, assumimos que a tese é falsa, e concluímos que a premissa também será falsa, ou seja, concluímos a negação da premissa;

2. **Redução ao Absurdo:** neste caso negamos que a implicação seja verdadeira (isto ocorre se afirmamos a premissa e, ao mesmo tempo, negamos a tese) e concluímos uma contradição (ou seja, no discurso demonstrativo haverá duas proposições contraditórias – uma a negação da outra) – como estamos assumindo que a argumentação é válida, devemos concluir que a hipótese da negação da implicação será falsa e, portanto, que a implicação será verdadeira.

Muitos textos confundem estas duas formas indiretas de demonstração. Elas só divergem em lógicas não clássicas, como veremos mais adiante.

Exercício 1: A implicação pode ser escrita de diversas maneiras distintas em português. Nas frases abaixo, indique o que é premissa e o que é conclusão da implicação:

1. se A, então B;
2. A implica B;
3. B, sempre que A (sempre que A ocorre, então B também deve ocorrer);
4. B, se A;
5. A, somente se B (se B não ocorre, então A não pode ocorrer);
6. A e, portanto, B;

7. A é condição suficiente para B (supondo a implicação verdadeira, basta que A seja verdadeira para que possamos concluir que B é verdadeira);

8. B é condição necessária para A (supondo a implicação verdadeira, se B for verdadeira, A tem que necessariamente ser verdadeira).

Variáveis: para indicar um elemento indeterminado (de alguma classe) usamos uma letra ou símbolo, que chamamos de veriável (como uma variável ou incógnita de uma equação). Assim, frases do tipo *seja*[4] *P uma proposição* contém a letra P indicando uma proposição qualquer – essa letra pode ser substituída por uma proposição específica.

Generalização de variáveis: em uma demonstração de uma proposição do tipo "*toda P, sentença,* $\Phi(P)$[5]"em geral lançamos como uma premissa a frase "*seja P uma sentença*"e continuamos a argumentação até chegarmos à afirmação $\Phi(P)$. Depois argumentamos que *como P é genérico, a sentença* $\Phi(p)$ *vale para todo P*. Isto significa que não apareceu no texto da argumentação nenhuma premissa e nem proposição que particularizasse a classe de variação da variável P e, portanto, permitimo-nos concluir que a afirmação $\Phi(P)$ valha para todo P. Este é o chamado princípio ou regra da generalização.

1.2.2 Recursão e Indução Finita

Um tipo recorrente de definição neste texto serão as definições em que são feitas construções por recursão, o que significa que partimos de uma classe de elementos iniciais e agregamos símbolos, ou fazemos alguma conta, sobre o resultado anterior. Toma a seguinte forma:

> **Passo Inicial:** uma definição qualquer.
> **Passo recursivo:** assumimos ter construído o objeto e fazemos a aplicação de uma função ou algoritmo[6] ao tal objeto.

Assumimos neste caso que temos a descrição completa de uma dada classe de objetos. Em tais construções, atribuímos um número natural (em $\mathbb{N}$) a

[4]Este é um modo meio pedante de fazer a afirmação *P é uma proposição.*

[5]Veja que usamos aqui a letra grega Φ como uma variável para indicar uma sentença envolvendo a letra P como parâmetro.

[6]Algoritmo é qualquer procedimento que acreditemos ser *mecanizável.*

cada objeto, sendo o zero atribuído aos elementos iniciais e, na hipótese de ter sido atribuído um número[7] n a um objeto da classe, atribuiremos o número $n+1$ ao objeto obtido pelo passo recursivo. (Por exemplo, n seria o número de símbolos acrescentados ao objeto.)

> **Princípio da Indução Finita:** se uma dada propriedade $\Phi(n)$ de números naturais vale em $n = 0$ e se também, para cada n a validade de $\Phi(n)$ implicar a de $\Phi(n+1)$, então é válido concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a propriedade $\Phi(n)$ vale.

Uma dedução por indução corre nos seguintes moldes:

- demonstração de $\Phi(0)$;
- assumir, como premissa, que valha $\Phi(n)$ (n uma variável para número natural);
- após alguma argumentação, concluir que vale $\Phi(n+1)$;
- *como n é genérico*, para todo n, vale que $\Phi(n)$ implica $\Phi(n+1)$;
- concluir, pelo princípio da indução, que para todo n vale $\Phi(n)$.

Essas são basicamente as regras do nosso discurso científico, com o qual desenvolveremos a geometria.

[7]Usando uma variável n para indicar um elemento de $\mathbb{N}$.

Capítulo 2

Os Postulados da Geometria Neutra

Os objetos básicos, com os quais desenvolveremos a geometria são chamados de *pontos*, *retas* e *planos*. É claro que temos uma compreensão intuitiva do que são esses objetos, representando-os por desenhos ou outra representações gráficas, mas o desenvolvimento da teoria independe de qualquer imagem ou representação das ideias correspondentes. Por outro lado, desenhos ajudam a compreensão do texto.

Para fixarmos a notação, a menos de menção explícita, usaremos letras romanas maiúsculas A, B, C, ..., para indicar pontos, letras romanas minúsculas a, b, ..., para indicar retas e letras gregas minúsculas π, ϕ, ..., para indicar planos.

Na *Geometria Plana* utilizamos apenas pontos e retas, e na *Geometria Espacial* utilizaremos os três tipos de objeto.

A Geometria é o estudo de certas relações entre esses objetos, que serão definidas mediante *postulados*, ou seja, asserções acerca dessas relações, a partir dos quais serão deduzidas *proposições*, que são também asserções acerca das relações.

2.1 Alguns modelos de geometrias

Para estimular um melhor entendimento dos conceitos introduzidos, inclusive suas limitações, apresentamos a seguir uma série de exemplos de *geometrias* que aparecerão de modo recorrente neste livro.

Exemplo 1: O plano da **Geometria Analítica Plana** é o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares ordenados de números reais (os pontos). As linhas são as retas $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$.

Exemplo 2: Geometria Analítica Espacial: é o conjunto $\mathbb{R}^3$ das triplas ordenadas de números reais (os pontos). Os planos são os conjuntos $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$, com a, b e c nem todos nulos, e as retas são os conjuntos intersecção de dois planos $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\}$ e $\pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\}$, tais que a tripla (a_1, b_1, c_1) não seja um múltiplo da tripla (a_2, b_2, c_2).

Exemplo 3: O plano da **Geometria Hiperbólica Plana** é o conjunto $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. As linhas são de dois tipos: verticais $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$ ou arcos de circunferência $\ell_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$.

Exemplo 4: Um modelo da **Geometria Hiperbólica Espacial:** é o conjunto $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$. Os planos são de dois tipos, os verticais $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{H} : ax + by + c = 0\}$ ou semiesferas $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{H}\text{: } (x - p)^2 + (y - q)^2 + z^2 = r^2\}$, e as retas são intersecções de dois desses planos (resultando em smi-retas verticais e semi-circunferências verticais).

Exemplo 5: O **plano de Moulton** é o conjunto $\mathbb{R}^2$, com linhas das forma $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$ (verticais), ou $\ell_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$, com $m < 0$ (linhas retas de inclinações negativas) ou da forma $\ell^*_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\text{: } y = 2mx + b, \text{ se } x < 0 \text{ e } y = mx + b \text{ se } x \geq 0\}$, com $m \geq 0$, (linhas quebradas e de inclinacoes positivas quando passam pelo eixo Oy).

Exemplo 6: O **plano "rasgado"** é o conjunto $\pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\text{: } x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$ e suas linhas são da forma $\{(x, y) \in \pi : ax + by = c\}$.

2.2 Postulados de Incidência ou Conexão

A primeira relação é a de incidência[1] (ou conexão), "$\cdot \mathrm{I} \cdot$", que relaciona pontos com retas e com planos, e também retas com planos: $P \cdot \mathrm{I} \cdot r$ (P incide em r), $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ (P incide em π) e $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ (r incide em π). A interpretação dessa relação nos modelos que encontraremos a seguir é a de que o ponto P está na reta r, ou que o ponto P está no plano π, ou que a reta r está no plano π.

Postulado I: Para cada par de pontos distintos P e Q, existe uma única reta r, tal que $P \cdot \mathrm{I} \cdot r$ e $Q \cdot \mathrm{I} \cdot r$. Denotamos tal reta por r_{PQ}, quando for conveniente lembrar desses pontos.

Um outro modo, mais informal de dizer a mesma coisa, é que, dados dois pontos distintos P e Q, existe uma única reta determinada por P e Q, denotada r_{PQ}, ou seja, r_{PQ} é a única reta em que esses pontos estão.

Postulado II: Dados três pontos P, Q e R não colineares (ou seja, não incidem numa mesma reta), existe um único plano π, tal que $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$, $Q \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $R \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$.

Informalmente, dados três pontos não colineares (isto é, não na mesma linha) P, Q e R, existe um único plano contendo P, Q e R. Tal plano será denotado por π_{PQR}.

Postulado III: Dados dois planos distintos π e ρ, se existir um ponto P, tal que $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $P \cdot \mathrm{I} \cdot \rho$, então existe uma única reta r, tal que $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $r \cdot \mathrm{I} \cdot \rho$.

Isto é, se dois planos distintos têm algum ponto em comum, então existe uma única reta contida em ambos.

Postulado IV: Para todo ponto P, toda reta r e todo plano π, se $P \cdot \mathrm{I} \cdot r$ e $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$, então $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$.

Isto serve para garantir que se P estiver em r e r em π, então P estará em π.

Postulado V: Toda reta contém pelo menos dois pontos; todo plano contém pelo menos três pontos não colineares (isto é, não na mesma reta).

[1] De *incidir*, do latim *incidere*, que significa *cair em*, ou *cair sobre*.

Postulado VI: Existem pelo menos quatro pontos não coplanares (isto é, não no mesmo plano).

Esses dois últimos postulados servem para descartar geometrias sem pontos ou retas.

Exemplo 7: Uma **Geometria Projetiva Plana** é uma geometria de incidência que também satisfaz mais dois postulados: cada linha tem pelo menos três pontos e, dadas duas linha distintas r_1 e r_2, existe um único ponto comum às duas linhas.

Exemplo 8: Uma **Geometria Projetiva Espacial** é uma geometria de incidência que também satisfaz: cada plano é modelo de uma geometria projetiva plana e para cada par de planos distintos π_1 e π_2, existe uma única reta r, tal que $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi_1$ e $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi_2$.

Exercício 2: Mostre que $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ com $\ell_1 = \{A, B, C\}$, $\ell_2 = \{A, D, E\}$, $\ell_3 = \{A, G, F\}$, $\ell_4 = \{C, G, D\}$, $\ell_5 = \{C, F, E\}$, $\ell_6 = \{B, G, E\}$ e $\ell_7 = \{B, D, F\}$ é uma geometria projetiva. (Verifique se valem todos os postulados.)

Usando apenas estes postulados, resolva os exercícios a seguir.

Exercício 3: Mostre que se duas linhas distintas se intersectam, então elas se intersectam em exatamente um ponto.

Exercício 4: Mostre que existem pelo menos 6 linhas e 4 planos numa geometria de incidência.

Exercício 5: Mostre que existem pelo menos três linhas distintas não concorrentes (isto é, existem retas r_1, r_2 e r_3 distintas e que não contêm um mesmo ponto P.)

Exercício 6: Mostre que dado um ponto P, existem pelo menos duas linhas distintas contendo P.

Exercício 7: Mostre que se dois pontos distintos A e B estão no plano π, então a linha r_{AB} está toda contida no plano π.

Exercício 8: Mostre que, dada a reta r e o ponto P que não esteja em r, existe um único plano π, tal que $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$.

2.3 Postulados de Ordem

Agora vamos enriquecer um pouco mais nossas geometrias, impondo uma relação de ordem entre pontos de uma mesma linha. Para isto, definimos uma relação ternária entre pontos denotada por $A - B - C$ e falamos que "o ponto B está entre os pontos A e C" (ou que A é oposto a C em relação a B) e deve satisfazer os seguintes postulados.

Postulado VII: Se $A - B - C$, então A, B e C são colineares e dois a dois distintos. Veja representação gráfica na Figura 2.1.

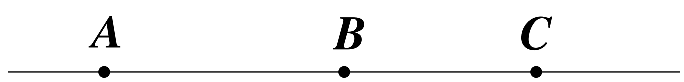

Figura 2.1: Representação gráfica da relação $A - B - C$.

Este postulado diz que a relação de ordem implica a colinearidade dos pontos envolvidos e que a ordem é estrita.

Postulado VIII: Se $A - B - C$, então $C - B - A$.

Este diz que a relação de ordem é simétrica.

Postulado IX: Dados $B \neq D$, existem $A, C, E \in r_{BD}$ tais que $A - B - D$, $B - C - D$ e $B - D - E$.

Este corresponde ao segundo postulado de Euclides, que todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente. Também diz que a relação de ordem de pontos é *densa*.

Postulado X: Dados os ponto A, B e C, pontos distintos e incidentes a uma mesma reta r, então exatamente uma das relações $A - B - C$, ou $A - C - B$ ou $B - A - C$ é verdadeira.

Este diz que a relação de ordem de pontos é total, ou linear, ou seja, não pode haver *ramificações* das retas.

Com essa noção de ordem de pontos em uma reta, podemos definir o **segmento** $\overline{AB}$ como sendo o conjunto de todos os pontos C entre A e B, incluindo também os **extremos do segmento**, ou seja, os pontos A e B.

Dada uma reta r e um ponto $O \cdot \mathrm{I} \cdot r$, e também dois pontos $A \cdot \mathrm{I} \cdot r$ e $B \cdot \mathrm{I} \cdot r$, tais que $A - O - B$, podemos também definir as **semi-retas** $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, como sendo os conjuntos $\overrightarrow{OA} = \{P \cdot \mathrm{I} \cdot r\colon\ P = O$, ou $P = A$ ou $O - P - A$, ou $O - A - P\}$ e $\overrightarrow{OB} = \{P \cdot \mathrm{I} \cdot r\colon\ P = O$, ou $P = B$ ou $O - P - B$, ou $O - B - P\}$.

Exercício 9: Mostre que, dada uma reta r e um ponto $O \cdot \mathrm{I} \cdot r$, e também dois pontos $A \cdot \mathrm{I} \cdot r$ e $B \cdot \mathrm{I} \cdot r$, tais que $A - O - B$, então, para todos os pontos $D \in \overrightarrow{OA}$ e $E \in \overrightarrow{OB}$, então $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Exercício 10: Mostre que o segmento $\overline{AB}$ é a intersecção das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

2.3.1 O Postulado de Pasch

O postulado de Pash, que estudaremos presentemente, também é um postulado de ordem. Foi introduzido pelo matemático alemão Moritz Pasch (8/11/1843-20/09/1930), em sua obra *Vorlesungen über Neuere Geometrie* (1882). Ele pode parecer "óbvio", mas é necessário, como o modelo do plano rasgado vai demonstrar.

Postulado XI: (Pasch) Dados os pontos A, B, e C não colineares e uma linha r no plano π_{ABC} (isto é, $r \cdot \mathrm{I} \cdot \pi_{ABC}$), distinta da reta r_{AB}, se $D \in r$ é um ponto tal que $A - D - B$, então ou r intersecta $\overline{AC}$ ou r intersecta $\overline{BC}$ (ou seja, existe um ponto $P \cdot \mathrm{I} \cdot \pi_{ABC}$, tal que, ou $P = C$, ou $A - P - C$ ou $B - P - C$. Veja os diagramas da Figura 2.2.

Esse postulado tem uma implicação importante sobre a *topologia* do plano ou do espaço das geometrias neutra, euclideana e hiperbólica, no sentido que vamos tornar explícito a seguir.

Dizemos que um conjunto A do espaço é **convexo** se, para todos os pares de pontos P e Q em A, o segmento $\overline{PQ}$ está todo contido em A.

Proposição 1 ***(Separação nos planos)*** *Dada uma linha r contida num plano π, existem conjuntos H_1 e H_2 em π (chamados de* lados de r *em π)*

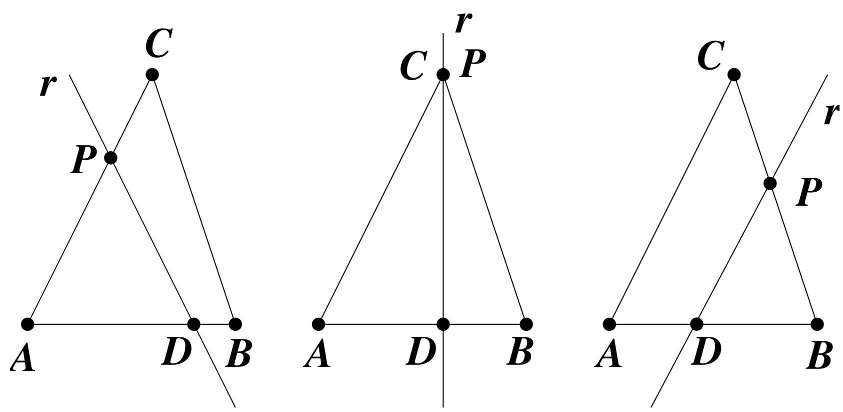

Figura 2.2: Diagrama para o Postulado de Pasch.

tais que H_1 *e* H_2 *são convexos;* $H_1 \cap r = \varnothing$, $H_2 \cap r = \varnothing$ *e* $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ *e cada ponto do plano* π *está em* H_1*, ou em* H_2 *ou em* r*; se* $P \in H_1$ *e* $Q \in H_2$ *então o segmento* $\overline{PQ}$ *intersecta a linha* r *num ponto* R*.*

Demonstração:

Acompanhemos a demonstração com o diagrama da Figura 2.3.

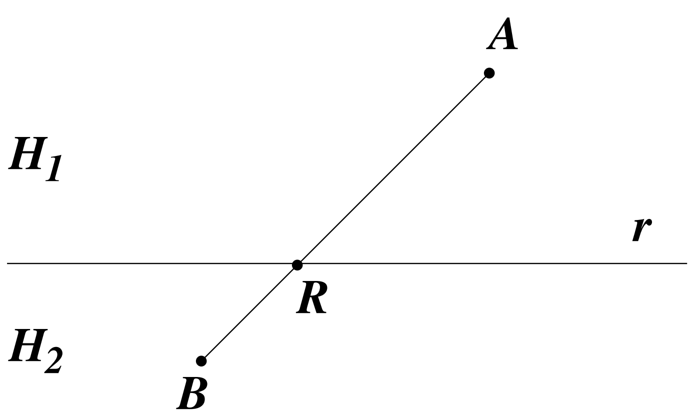

Figura 2.3: Separação de um plano.

Seja $P \in \pi$ um ponto fora de r e sejam $H_1 = \{Q \in \pi : \overline{PQ} \cap r = \varnothing\}$ e $H_2 = \{Q \in \pi : Q \notin r \text{ e } \overline{PQ} \cap r \neq \varnothing\}$.

Então $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap r = H_2 \cap r = \varnothing$, e todo ponto do plano ou está em r ou em H_1 ou em H_2. Falta mostrar que H_1 e H_2 são convexos e que dados $A \in H_1$ e $B \in H_2$, o segmento $\overline{AB}$ intersecta r.

Vamos mostrar que H_1 é convexo. Para tanto, sejam $A, B \in H_1$, $A \neq B$, e suponhamos que $A \neq P$ e $B \neq P$ (os casos em que $A = P$ ou $B = P$ ficam para os leitores). Queremos mostrar que todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_1. Se A, B e P estão numa mesma linha r_{AB}, então ou $A - B - P$ ou $A - P - B$ ou $B - A - P$. Mostre que em nenhum destes casos, $\overline{AB}$ pode ter ponto nem de H_2 e nem de r. Se A, B e P não são colineares, seja $D \in \overline{AB}$ tal que $A - D - B$. Sabemos que r não intersecta nem $\overline{AP}$ e nem $\overline{BP}$ (por quê?). Se $D \in r$ então r intersectaria $\overline{AB}$, e por Pasch, deveria intersectar $\overline{AP}$ ou $\overline{BP}$. Portanto $D \notin r$. Se $D \in H_2$, então r intersecta $\overline{DP}$. Por Pasch, aplicado aos triângulos $\triangle ADP$ e $\triangle BDP$, teríamos que r intersectaria $\overline{AP}$ ou $\overline{BP}$ (por quê?), uma contradição. Portanto, todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_1.

Vamos mostrar agora que H_2 é convexo. Sejam $A', B' \in H_2$, $A' \neq B'$. Precisamos mostrar que todos os pontos de $\overline{A'B'}$ estão em H_2. Novamente temos dois casos, a saber, A', B' e P são colineares. Então ou $A' - B' - P$ ou $B' - A' - P$. (Mostre que não pode ocorrer $A' - P - B'$.) Se $A' - B' - P$, pela definição de H_2 existe um ponto $R \in r \cap \overline{B'P}$, tal que $B' - R - P$. Como $r_{A'B'} = r_{B'P}$, o único ponto de encontro de r com $r_{A'B'}$ é R. Como $A' - B' - R$, os pontos de $\overline{A'B'}$ estão todos em H_2 (por quê?). Suponhamos agora que A', B' e P sejam não colineares. Consideremos o triângulo $\triangle A'B'P$. Pela definição de H_2, r intersecta ambos os lados $\overline{A'P}$, no ponto R e $\overline{B'P}$, no ponto S. Vamos mostrar que nenhum ponto de $\overline{A'B'}$ pode estar em r. Seja $T \in \overline{A'B'}$, $A' - T - B'$. Se $T \in r$, podemos ter $R - S - T$, $R - T - S$ ou $S - R - T$. Vamos considerar o caso $R - S - T$, deixando os outros dois para os leitores. Consideremos o $\triangle A'RT$, com a linha $r_{B'P}$; temos que $r_{B'P} \neq r_{A'T} = r_{A'B'}$ e $r_{B'P} \neq r_{A'R} = r_{A'P}$ (pois A', B' e P não são colineares); portanto $r_{B'P}$ não encontra nem $\overline{A'R}$ e nem $\overline{A'T}$ (por quê?); como encontra $\overline{RT}$ no ponto S, temos uma contradição ao postulado de Pasch. Aplicando Pasch aos triângulos $\triangle A'TP$ e $\triangle TB'P$, temos que $\overline{TP}$ intersecta r (por quê?) e, portanto $T \in H_2$, pela definição de H_2. Portanto H_2 é convexo.

Agora sejam $A'' \in H_1$ e $B'' \in H_2$. Precisamos mostrar que $\overline{A''B''}$ intersecta r num ponto R. Se $A'' = P$, pela definição de H_2, $\overline{A''B''} = \overline{PB''}$ intersecta r. Se A'', B'' e P não são colineares, como $\overline{B''P}$ intersecta r e $\overline{A''P}$ não intersecta r (por quê?), por Pasch no triângulo $\triangle A''B''P$, $\overline{A''B''}$ intersecta r num ponto R, como queríamos. Se A'', B'' e P são colineares, como $\overline{B''P}$ intersecta r (pela definição de H_2), seja R este ponto em comum. Temos que $B'' - R - P$ e, como $A'' \in r_{BP}$, $A'' \in H_1$, $A'' \neq P$, $A'' \neq R$ e

$A'' \neq B$, temos que, ou $P - R - A''$ (que não pode ocorrer, pois $A \in H_1$, que é convexo), ou $P - A'' - R$, ou $A'' - P - R$, o que implica que $\overline{A''B''}$ encontra r em R, como queríamos. $\square$

Definimos o **interior de uma semi reta** $\overrightarrow{AB}$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{AB})$ dos pontos $P \in \overrightarrow{AB}$ tais que $P \neq A$ (a semi reta menos o vértice); **interior de um segmento** $\overline{AB}$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\overline{AB})$ dos pontos $P \in \overline{AB}$ tais que $P \neq A$ e $P \neq B$; o conjunto que é a união de duas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, sendo que O, A e B são três pontos não colineares, é chamado de **ângulo** e o **interior do ângulo** $\angle AOB$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\angle AOB)$ obtido pela interseção $H_1 \cap \overline{H}_1$, sendo H_1 o lado de r_{OB} contendo A e $\overline{H}_1$ o lado de r_{OA} contendo B. Veja uma representação gráfica de um ângulo $\angle ABC$ na Figura 2.4.

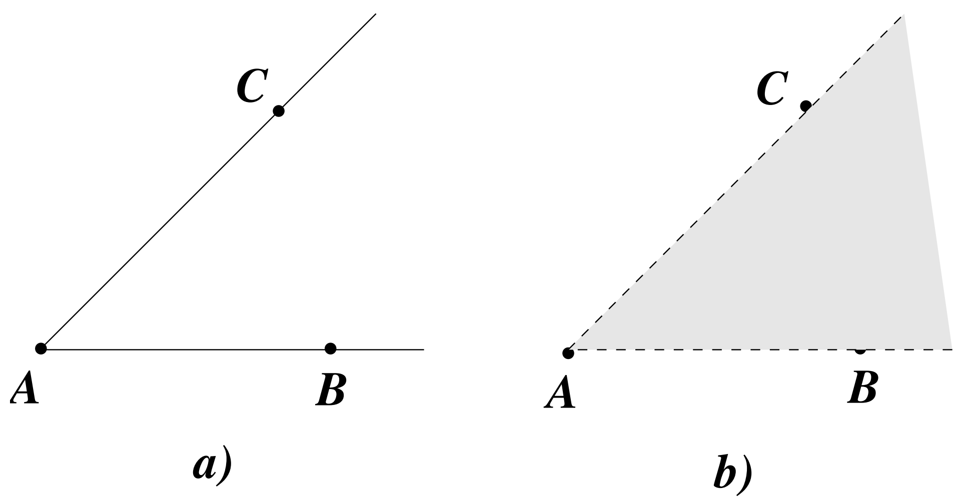

Figura 2.4: Representação gráfica do ângulo $\angle ABC$ e de seu interior.

Exercício 11: (O Teorema das Barras Transversais) Mostre que, se $P \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ então $\overrightarrow{BP}$ intersecta $\overline{AC}$ num único ponto F com $A - F - C$. Veja a figura 2.5.

Proposição 2 (Separação do espaço) *Dada um plano π, existem conjuntos G_1 e G_2 (chamados de lados de π) tais que G_1 e G_2 são convexos; $G_1 \cap \pi = \varnothing$, $G_2 \cap \pi = \varnothing$ e $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ e cada ponto do espaço está em G_1, ou em G_2 ou em π; se $P \in G_1$ e $Q \in G_2$ então o segmento $\overline{PQ}$ intersecta o plano π num ponto R.*

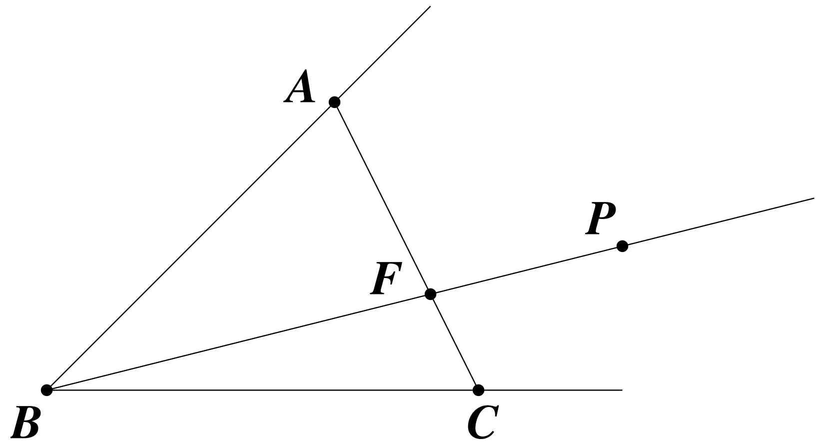

Figura 2.5: Teorema das Barras Transversais.

Demonstração: Veja a figura 2.6.

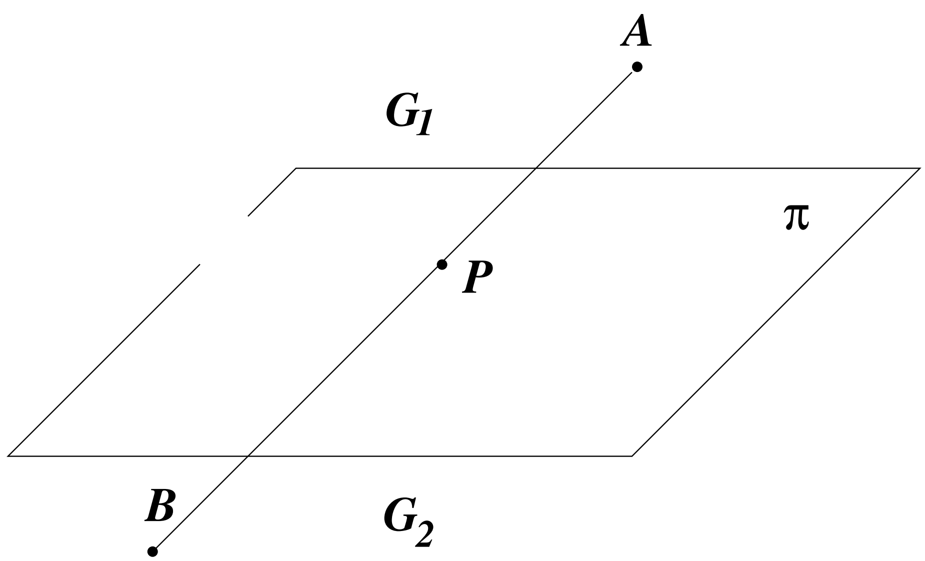

Figura 2.6: Separação do espaço.

Seja P um ponto fora de π e sejam $G_1 = \{Q : \overline{PQ} \cap \pi = \varnothing\}$ e $G_2 = \{Q : Q \notin \pi$ e $\overline{PQ} \cap \pi \neq \varnothing\}$.

Para provarmos que G_1 é convexo, sejam A e B pontos de G_1. considere o plano $\alpha = PAB$ (ou um plano α contendo P, A e B, caso sejam colineares). Se $\alpha \cap \pi = \varnothing$, como um plano é convexo, então $\overline{AB} \subset \alpha \subset G_1$ (por que?).

Caso $\alpha \cap \pi \neq \varnothing$, sejam H_1 e H_2 os lados da linha $\alpha \cap \pi$ no plano α. Então $H_1 = G_1 \cap \alpha$ ou $H_2 = G_1 \cap \alpha$ (por que?). Portanto $\overline{AB} \subset G_1$ (por que?).

O mesmo tipo de argumento mostra que G_2 também é convexo e as demais afirmações. Os leitores são convidados a preencher os detalhes. $\square$

2.4 Postulados de Congruência

Agora introduzimos uma noção de medida de comprimento na geometria, pela noção de congruência de segmentos, que é a relação $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ entre segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, cujas propriedades são descritas pelos postulados a seguir.

Postulado XII: Dados dois pontos distintos P e Q e uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$, existe um único ponto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$.

Este postulado diz que o plano ou o espaço é homogêneo, no sentido que ele se comporta do mesmo modo em qualquer parte.

Postulado XIII: Dados A, B, C, D, E e F, temos $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ e, se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$.

Essa é uma relação de equivalência.

Postulado XIV: Se $A - B - C$, $P - Q - R$, $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$.

Dados três pontos não colineares A, B e C, lembramos que o ângulo $\angle ABC$ é o conjunto $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$. O ponto B é o vértice do ângulo.

Exercício 12: Mostre que se O, A e B forem três pontos não colineares, e D for um ponto de $\overrightarrow{OA}$, com $D \neq O$, e E um ponto de $\overrightarrow{OB}$, com $E \neq O$, então $\angle AOB = \angle DOE$.

Primeiro postulamos a construção de ângulos e iniciamos a postulação da relação de congruência entre ângulos, denotada $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e representada graficamente na Figura 2.7.

Postulado XV: Dados o ângulo $\angle AOB$, uma semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ e um dos lados H_1 de r_{PQ} num plano contendo r_{PQ}, existe uma única semi-reta $\overrightarrow{PR}$ tal que $R \in H_1$ e $\angle AOB \equiv \angle RPQ$.

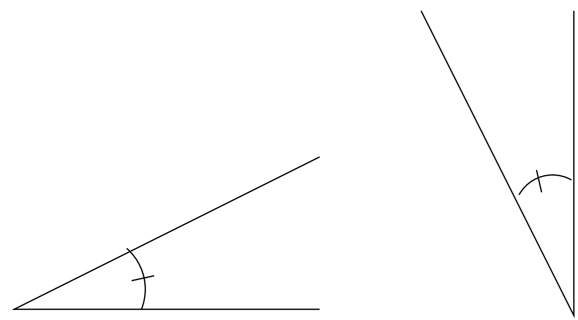

Figura 2.7: Representação gráfica da congruência de dois ângulos.

Agora comparamos ângulos.

Postulado XVI: Dados os ângulos $\angle ABC$, $\angle DEF$ e $\angle GHI$, temos $\angle ABC \equiv \angle ABC$ e, se $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle ABC \equiv \angle GHI$, então $\angle DEF \equiv \angle GHI$.

Dadas duas triplas ordenadas de pontos não colineares (A, B, C) e (D, E, F), dizemos que a correspondência $A \mapsto D$, $B \mapsto E$, $C \mapsto F$ é uma congruência de triângulos entre $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ (aqui a ordem em que aparecem os pontos é importante – veja a Figura 2.8), se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, $\angle BAC \equiv \angle EDF$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle ACB \equiv \angle DFE$. Denotamos este conceito por $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ e insistimos que dizer $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ é *diferente* de dizer $\triangle ACB \equiv \triangle DEF$.

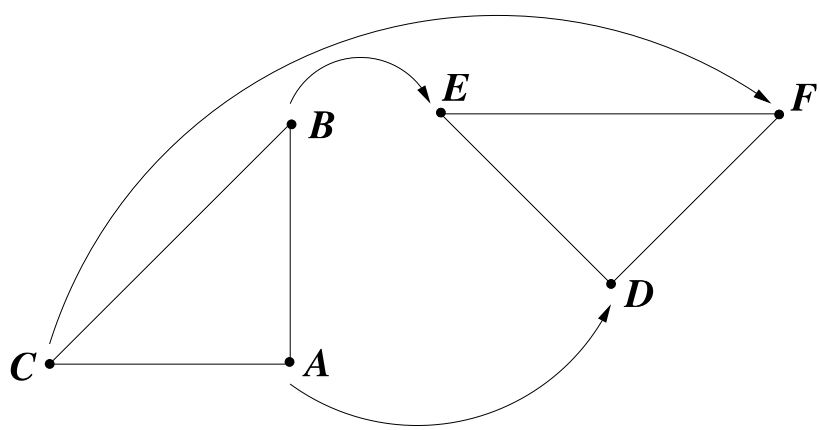

Figura 2.8: Congruência de triângulos.

O próximo postulado é o critério Lado-Ângulo-Lado (LAL) de congruência de triângulos, que relaciona congruência de segmentos com congruência de ângulos de um modo muito particular.

No Livro I dos Elementos de Euclides, este enunciado é a Proposição IV. Sua demonstração depende de um postulado não enunciado de que duas circunferências cuja soma dos raios é menor que a distância entre os centros encontram-se em dois pontos. Ou, como é usado neste livro, dado um triângulo $\triangle ABC$ e um segmento $\overline{DE} \equiv \overline{AB}$, então existe um ponto F tal que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Postulado XVII: (LAL) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Veremos mais adiante que os conhecidos critérios de congruência de triângulos, o LLL (Lado-Lado-Lado), ALA (Ângulo-Lado-Ângulo) e LAAo (Lado-Ângulo-Ângulo oposto) também são válidos (na geometria neutra).

2.4.1 Ângulos retos

Uma família de ângulos muito importante em geometria são os **ângulos retos**. O ângulo $\angle AOB$ é reto se, dado o ponto C, tal que $C - O - A$, então $\angle AOB \equiv \angle COB$.

Proposição 3 *Existem ângulos retos.*

Demonstração: Num plano π, escolhemos uma reta r, dois pontos distintos $A \cdot \mathrm{I} \cdot r$ e $O \cdot \mathrm{I} \cdot r$, e mais dois pontos B e B' em lados opostos de π em relação a r, e tais que $\angle AOB \equiv \angle AOB'$ e $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$. Veja o diagrama da figura 2.9.

Seja $C \cdot \mathrm{I} \cdot r$, tal que $C \cdot \mathrm{I} \cdot r_{BB'}$. Por LAL, $\angle ACB \equiv \angle ACB'$, que é, portanto, um ângulo reto. □

Exercício 13: Aponte quais postulados foram usados em cada passagem dessa demonstração.

No caso da demonstração, dizemos que as retas $r = r_{AC}$ e $r_{BB'}$ são **perpendiculares** e que o ponto C é o **pé da perpendicular**, e denotamos $r_{AC} \perp r_{BB'}$.

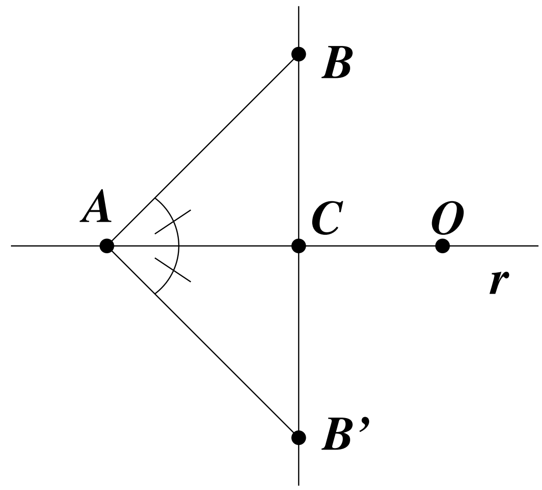

Figura 2.9: Existência de ângulos retos.

2.4.2 Comparação de ângulos

Dados o ângulo $\angle AOB$ e um ponto C no interior de $\angle AOB$, dizemos que o ângulo $\angle AOC$ é menor do que o ângulo $\angle AOB$ e denotamos $\angle AOC < \angle AOB$.

Mais geralmente, dizemos que o ângulo $\angle A'O'C'$ é menor do que o ângulo $\angle AOB$, se existir um ponto C no interior do ângulo $\angle AOB$, tal que $\angle A'O'C' \equiv \angle AOC$, e denotamos tal fato por $\angle A'O'C' < \angle AOB$. A notação $\angle CPD \leq \angle AOB$ significa que, ou $\angle CPD < \angle AOB$, ou $\angle CPD \equiv \angle AOB$.

Um **ângulo agudo** é um ângulo menor do que um ângulo reto e um **ângulo obtuso** é um ângulo maior do que um ângulo reto.

Exercício 14: Mostre que $\angle AOB \leq \angle AOB$, e que, se $\angle AOB \leq \angle CPD$ e $\angle CPD \leq \angle EQF$, então $\angle AOB \leq \angle EQF$.

2.5 Postulados de Completitude

Um dos postulados não mencionados na obra de Euclides aparece já em sua primeira proposição: construir um triângulo equilátero. Sua demonstração é simples, usada em qualquer curso de desenho: dado um segmento $\overline{AB}$ (um dos lados do triângulo equilátero a ser construído), posicionamos a ponta seca do compasso em A, com abertura até B e traçamos uma circunferência de centro em A; fazemos o mesmo com a ponta seca em B e abertura até A e traçamos outra circunferência; *cada um dos pontos de encontro das duas circunferências determina o terceiro vértice do triângulo equilátero desejado.* Acompanhe a construção no diagrama da Figura 2.10.

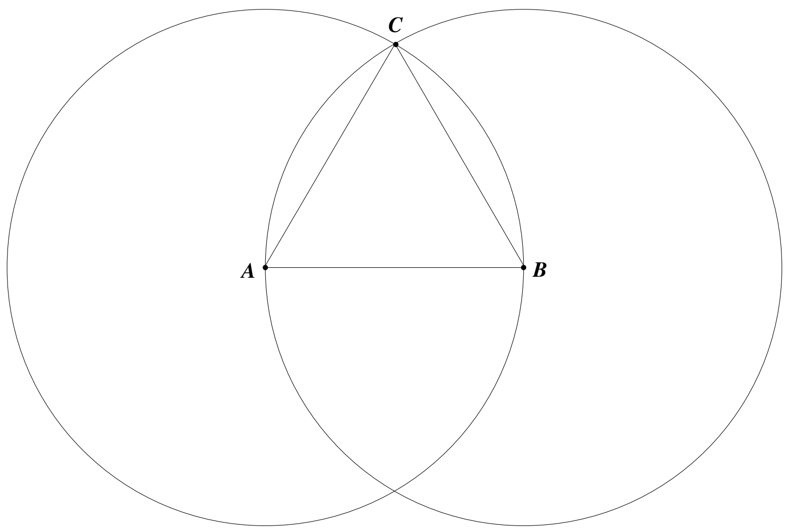

Figura 2.10: Euclides, *Elementos*, Livro I, Proposição 1: a construção de um triângulo equilátero.

Uma suposição intuitivamente "*óbvia*"nessa argumentação é que as duas circunferência realmente se encontram. No entanto, hoje em dia sabemos que essa suposição não é óbvia e nem derivável dos outros postulados.

Exemplo 9: A Geometria Analítica Racional (Plana): O objetivo deste exercício é demonstrar que essa suposição pode até ser falsa. O plano aqui é o conjunto $\mathbb{Q}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$, os pontos de $\mathbb{R}^2$, cujas coordenadas são racionais. Tomando $A = (0,0)$ e $B = (0,1)$, então os pontos de encontro das circunferências de raio 1 e centros A e B são $C = (1/2, \sqrt{3}/2) e (1/2, -\sqrt{3}/2)$, que não têm todas as suas coordenadas racionais e, portanto, não fazem parte do plano.

Exercício 15: Verifique que valem todos os outros postulados de geometria plana na Geometria Analítica Plana Racional.

Assim, precisamos de um postulado que garanta que tais construções funcionem.

O postulado de completitude que adotaremos é uma imitação da completitude (Dedekind) de $\mathbb{R}$, que passamos a explicar.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é Dedekind[2] completo, que é a seguinte: dados dois subconjuntos não vazios $X, Y \subset \mathbb{R}$, tais que, para todos $x \in X$ e $y \in Y$, vale a desigualdade $x < y$ (resumidamente, $X < Y$), então existe um elemento $r \in \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in X$ e $y \in Y$, temos que $x \leq r \leq y$. Essa propriedade é básica no estudo de funções contínuas em $\mathbb{R}$. Só para comparar, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não tem essa propriedade: se $X = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x < \sqrt{2}\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q}\colon\ y > \sqrt{2}\}$, então o único número real que poderia ficar entre X e Y é $\sqrt{2}$, que não está em $\mathbb{Q}$.

Imitando essa descrição em termos de pontos e retas, postulamos:

Postulado XVIII: (Completitude de Dedekind) Dada uma linha r, suponha que X e Y são conjuntos não vazios de pontos de r, tais que $X \cap Y = \varnothing$, $X \cup Y = r$, e para todos os pontos $A, B, C \in r$, se $A - B - C$ e $A, C \in X$ então $B \in X$ e se $A - B - C$ e $A, C \in Y$, então $B \in Y$. Então, neste caso, existe um ponto $O \in r$ e semi-retas opostas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, tais que $A - O - B$, $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{OA}) \subset X$, $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{OB}) \subset Y$ e $O \in X$ ou $O \in Y$.

Este postulado tem muitas conseqüências importantes. Vamos começar com a propriedade de "*arquimedianeidade*".

Proposição 4 Toda linha é arquimediana, ou seja, para qualquer conjunto de pontos $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tais que $\overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_{n+1}}$ (para todo $n \in \mathbb{Z}$) de uma linha r, e para todo ponto $P \in r$, existe algum $n \in \mathbb{Z}$, tal que $P \in \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$.

Demonstração: Sejam

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overrightarrow{A_nA_{n-1}} \text{ (união de semi-retas),}$$

$$Y = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \overrightarrow{A_nA_{n+1}} \text{ (intersecção das semi-retas opostas).}$$

[2]Richard Dedekind, matemático alemão que introduziu esse conceito.

Observe que $X \cap Y = \varnothing$ e $X \cup Y = r$ (por que?). Agora suponha que $A, C \in X$ e $A - B - C$. Então existe alguma semi-reta $\overrightarrow{A_n A_{n-1}}$ tal que $A, C \in \overrightarrow{A_n A_{n-1}}$. Portanto $B \in \overrightarrow{A_n A_{n-1}}$ (por que?), ou seja, $B \in X$. De modo similar, mostramos que se $A, C \in Y$ e $A - B - C$, então $B \in Y$ (fa ca isto).

Suponha que $Y \neq \varnothing$. Pelo postulado da continuidade, existe um ponto $O \in r$ e semi-retas opostas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, tais que o interior de $\overrightarrow{OA}$ está contido em X e o interior de $\overrightarrow{OB}$ está contido em Y e $O \in X$ ou $O \in Y$. Se $O \in X$, existe uma semi-reta $\overrightarrow{A_n A_{n-1}}$ contendo O. Mas daí, $A_{n+1} - O - A$, contrário ao fato que interior de $\overrightarrow{OA}$ está contido em X e o interior de $\overrightarrow{OB}$ está contido em Y. Se $O \in Y$, seja $C \in r$ tal que $A_0 - C - O$ e $\overline{CO} \equiv \overline{A_0 A_1}$. Como $A_0 - C - O$, C está na semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e $C \neq O$. Portanto C está no interior desta semi-reta, o que implica que $C \in X$. Portanto existe uma semi-reta $\overrightarrow{A_n A_{n-1}}$ contendo C. Como $\overline{A_n A_{n-1}} \equiv \overline{A_{n+1} A_n} \equiv \overline{A_0 A_1} \equiv \overline{CO}$, o ponto O estaria em $\overrightarrow{A_{n+1} A_n}$, contrário à hipótese de que $O \in Y$ (lembre-se de que $X \cap Y = \varnothing$).

Portanto Y tem que ser vazio, ou seja para todo ponto $P \in r$, existe algum $n \in \mathbb{Z}$, tal que $P \in \overrightarrow{A_n A_{n+1}}$. □

2.5.1 Razão de segmentos

Um conceito importante que a completitude traz é a noção de **razão de segmentos**, que passamos a definir.

Dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é menor do que o segmento $\overline{CD}$ se houver um ponto F, tal que $A - B - F$ e $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$, e denotamos tal fato por $\overline{AB} < \overline{CD}$. Escreveremos $\overline{AB} \leq \overline{CD}$ se $\overline{AB} < \overline{CD}$ ou $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Observe-se que, se $A - B - C$, então $\overline{AC} < \overline{CB}$.

Dizemos que o segmento $\overline{PQ}$ é uma soma dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se existir um ponto R, tal que $P - R - Q$ e uma das duas condições abaixo valer:

1. $\overline{AB} \equiv \overline{PR}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{RQ}$; ou

2. $\overline{AB} \equiv \overline{QR}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{RP}$.

Neste caso denotaremos o segmento $\overline{PQ}$ como $\overline{AB}+\overline{CD}$. Observe que isto não é uma função, no sentido em que o segmento $\overline{PQ}$ não é univocamente determinado. Mas isso não será problema.

Definiremos agora a **multiplicação de segmentos por um número inteiro**. Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definimos a notação $n \cdot \overline{AB}$ por recursão em n:

1. $1 \cdot \overline{AB} = \overline{AB}$;
2. $(n+1) \cdot \overline{AB} = n \cdot \overline{AB} + \overline{AB}$.

Ou seja, $n \cdot \overline{AB}$ é o segmento obtido pela soma de $\overline{AB}$ com ele mesmo n vezes (ou melhor, são todos os segmentos que representam tal soma).

Proposição 5 *Dados dois pontos distintos A e B, existe um único ponto E no segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{BC} =\equiv \overline{AC}$, isto é, existe o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.*

Demonstração: Escolhemos um plano qualquer π, tal que $A \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$ e $B \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$. Então a reta r_{AB} também incide em π, e separa o plano em dois lados η_1 e η_2. Escolha um ponto $C \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$, no lado η_1 e outro ponto D no lado oposto (η_2), de modo que $\angle CAB \equiv \angle DBA$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$. Pela Proposição das Barras Transversais, o segmento $\overline{CD}$ intersecta o segmento $\overline{AB}$ em um ponto E, tal que $A - E - B$. Usando novamente LAL, concluímos que $\triangle AEC \equiv \triangle BED$. Isto quer dizer que E é o ponto médio desejado. $\square$

Na verdade, podemos definir a notação $\overline{AE} = (1/2) \cdots \overline{AB}$. Podemos fazer o mesmo com qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Primeiramente observemos que:

Exercício 16: Dados dois pontos distintos A e B, e dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, existe um ponto C, tal que $n \cdot \overline{AC} < \overline{AB}$. Verifique esta afirmação, com a sugestão de escolher $k \in \mathbb{N}$, tal que $2^k > n$ e iterando k vezes a obtenção do ponto médio de um segmento.

Proposição 6 *Dados dois pontos distintos A e B, e dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existe um único ponto C no segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{AB} = n \cdot \overline{AC}$. Podemos* *denotar o segmento*[3] $\overline{AC}$ *como* $(1/n) \cdot \overline{AB}$.

Demonstração: Se $n = 1$, então $C = B$.

Suponhamos que $n > 1$ e definimos $X = \{P \in \overline{AB}\colon P = A$, ou $P-A-B$, ou $n \cdot \overline{AP} < \overline{AB}\}$ e $Y = \{Q \in \overline{AB}\colon Q = B$, ou $A-B-Q$, ou $\overline{AB} < n \cdot \overline{AQ}\}$.

É fácil ver que esses conjuntos satisfazem as hipóteses do postulado da completitude. Claramente X e Y não são vazios e, pela propriedade de arquimedianeidade, os conjuntos X e Y satisfaem as demais hipóteses.

Portanto, existe um ponto C, tal que $P-C-Q$, para todo $P \in X$ e todo $Q \in Y$. Verifiquemos que este ponto C resolve a proposição.

Claramente, temos que $A - C - B$. Portanto, vale uma, e somente uma, das possibilidades: $n \cdot \overline{AC} < \overline{AB}$, ou $n \cdot \overline{AC} = \overline{AB}$, ou $\overline{AB} < n \cdot \overline{AC}$. Temos que descartar a primeira e a última.

Trataremos apenas da primeira, deixando a última possibilidade como exercício.

Suponha que $P \in X$ seja tal que $A - P - B$, e seja T, tal que $A - T - B$ e $\overline{AT} = n \cdot \overline{AP}$. Seja W um ponto, tal que $P - W - B$ e $n \cdot \overline{PW} < \overline{TB}$. Então $n \cdot \overline{AW} < \overline{AB}$ e, portanto $W \in X$. Isso quer dizer que $C \notin X$.

Como $C \notin Y$ (exercício!), a única possibilidade que sobrou é que $n \cdot \overline{AC} = \overline{AB}$, como queríamos. $\square$

Agora, se $\lambda = m/n \in \mathbb{Q}$ for um número racional, podemos definir $\lambda \cdot \overline{AB} = m \cdot ((1/n) \cdot \overline{AB})$.

Exercício 17: Mostre que, $\lambda = m/n \in \mathbb{Q}$ for um número racional, também vale a igualdade $\lambda \cdot \overline{AB} = (1/n) \cdot ((m \cdot \overline{AB})$. Observe que o primeiro membro da igualdade é o que foi definido acima.

Usando a ideia de limite (ou aproximações sucessivas), podemos agora definir a multiplicação de um segmento $\overline{AB}$ por um número real $\lambda \in \mathbb{R}$.

Qualquer número real $\lambda > 0$ pode ser escrito em expansão decimal, $\lambda = a_0, a_1 a_2 \ldots$, com $a_0 \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, para $i \geq 1$,

[3] Os leitores desavisados podem sentir a tentação de realizar uma construção simples, envolvendo a noção de semelhança de triângulos. No entanto, veremos mais adiante que essa noção é, na verdade, equivalente ao quinto postulado de Euclides, que não pode ser usado ainda.

significando que

$$\lambda = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k}.$$

Vamos chamar o número (necessariamente racional) $\lambda_N = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k}$, que é o *truncamento* de λ até a N-ésima casa decimal.

Transportando essa ideia para a geometria, definimos a **multiplicação de segmento por número real**. Definimos o segmento $\lambda\overline{AB}$ (com A e B dois pontos distintos) como sendo o segmento $\overline{AC}$ assim determinado: seja $X = \{P \cdot \mathrm{I} \cdot r_{AB}$: ou $P - A - B$, ou $P = A$ ou, para algum $N \in \mathbb{N}$, $\overline{AP} < \lambda_N \cdot \overline{AB}\}$ e $Y = \{P \cdot \mathrm{I} \cdot r_{AB}$: para qualquer $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_N \cdot \overline{AB} < \overline{AP}\}$. Certamente o par de subconjuntos de r_{AB}, X e Y, satisfazem as hipóteses do Postulado da Completitude de Dedekind e, portanto, existe um ponto C, tal que, para todos os pontos $P \in X$ e $Q \in Y$, vale a relação $P - C - Q$. Ainda mais:

Exercício 18: Mostre que se $D \cdot \mathrm{I} \cdot r_{AB}$ e para todos os pontos $P \in X$ e $Q \in Y$, valer a relação $P - D - Q$, então D e C coincidem.

Exercício 19: Mostre que se $\lambda = m/n \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$, então essa última definição produz o mesmo segmento $\lambda \cdot \overline{AB}$ que a multiplicação de segmentos por número racional.

Por fim, definimos a razão de segmentos $\overline{AB} \div \overline{CD}$ (em que $A \neq B$ e $C \neq D$) como sendo o número real (positivo) λ, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

O Postulado XII[4] garante que sempre existe essa razão de segmentos:

Proposição 7 *Dados os quatro pontos A, B, C e D, tais que $A \neq B$ e $C \neq D$, então existe um único número real positivo λ, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.*

Demonstração: O Postulado XII permite-nos obter um ponto $E \in \overrightarrow{AB}$, tal que $\overline{AE} \equiv \overline{CD}$. Seja $\lambda = \overline{AB} \div \overline{AE}$. $\square$

[4] Dados dois pontos distintos P e Q e uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$, existe um único ponto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$.

2.5.2 Introdução de coordenadas

A noção de razão de segmentos pode ser usada para *algebrizar* a geometria, introduzindo coordenadas, da seguinte maneira.

Réguas Graduadas

Proposição 8 (Réguas Graduadas) *Para cada linha r, existe (pelo menos) uma função bijetora $f_r : r \to \mathbb{R}$, tal que $A - B - C$ se, e somente se, $f_r(B)$ está entre $f_r(A)$ e $f_r(C)$, na ordem de $\mathbb{R}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ se, e somente se, $|f_{AB}(B) - f_{AB}(A)| = |f_{CD}(D) - f_{CD}(C)|$, sendo f_{AB} uma função para r_{AB} e f_{CD} uma função para r_{CD}. (Uma tal função f_r é chamada de sistema de coordenadas (ou régua graduada) da linha r.)*

Demonstração: Seja r uma régua, e $O \cdot \mathrm{I} \cdot r$ um ponto qualquer. Escolhemos outro ponto $P \cdot \mathrm{I} \cdot R$, distinto de O. Definimos $f_r : r \to \mathbb{R}$ por:

1. $f_r(O) = 0$;
2. se $Q \in \overrightarrow{OP}$, e $Q \neq O$, $f_r(Q) = \overline{OQ} \div \overline{OP}$;
3. se $Q \cdot \mathrm{I} \cdot R$ e $Q - O - P$, $f_r(Q) = -\overline{OQ} \div \overline{OP}$.

Observemos que $f_r(P) = 1$, fixando-se, assim, uma unidade de medida.

Para qualquer outra reta s, escolhemos um par de pontos O' e P' em s, tais que $\overline{OP} \equiv \overline{O'P'}$ e definimos f_s do mesmo modo que f_r, normalizando $f_s(O') = 0$ e $f_s(P') = 1$.

Certamente essas réguas satisfazem as condições desta Prpoposição. $\square$

Transferidores

Podemos também introduzir medida de ângulos, de modo a preservar os postulados de congruência. A ideia é similar ao que fizemos com as retas, mas apresnta algumas diferenças essenciais.

Dizemos que o ângulo $\angle AOB$ é a soma dos ângulos $\angle CPD$ e $\angle EQF$ se existir um ponto G no interior do ângulo $\angle AOB$, tal que $\angle AOG \equiv \angle CPD$ e $\angle GOB \equiv \angle EQF$. Denotamos tal fato por $\angle AOB = \angle CPD + \angle EQF$

Observemos que nem todo par de ângulos podem ser somados. Por exemplo, se os ângulos $\angle CPD$ e $\angle EQF$ forem retos, não existe um ângulo[5] que seja sua soma.

Exercício 20: Mostre que todo ângulo obtuso é a soma de um ângulo reto com um ângulo agudo.

Podemos multiplicar ângulos por alguns números reais, começando pelos números racionais:

Definimos a multiplicação de um ângulo pon $n \in \mathbb{N}$, $\angle AOB = n \cdot \angle CPD$, por recursão:

1. $n = 1$: $\angle AOB = 1 \cdot \angle CPD$ se, e somente se, $\angle AOB \equiv \angle CPD$;

2. $n \mapsto n+1$: $\angle AOB = (n+1) \cdot \angle CPD$ se $\angle AOB = n \cdot \angle CPD + \angle CPD$.

Definimos, neste caso, $\angle CPD = (1/n) \cdot \angle AOB$.

Para $r = m/n \in \mathbb{Q}$, um número racional (positivo), definimos $\angle AOB = (m/n) \cdot \angle CPD = m \cdot ((1/n) \cdot \angle CPD$.

Para definirmos a multiplicação de $\angle CPD$ por um número real $\lambda > 0$, procedemos de modo similar ao caso de multiplicação de segmentos por λ.

Comecemos com o caso em que $0 < \lambda < 1$. Escrevemos, novamente, $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ (aqui $a_0 = 0$) e seus truncamentos $\lambda_N = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k}$.

Proposição 9 *Dados um ângulo $\angle AOB$ e um número real λ, tal que $0 < \lambda < 1$, então existe um único ponto C, tal que $A - C - B$ e, para todos os pontos P e Q, tais que $A - P - C - Q - B$, vale que:*

1. *existe $N \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tal que $\angle AOP < \lambda_N \cdot \angle AOB$;*

2. *para todo $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, $\lambda_N \cdot \angle AOB < \angle AOQ$.*

Demonstração: Novamente, uma aplicação do Postulado da Completitude, e fica como exercício. □

[5]Com a definição que estamos usando: a figura composta por duas semi-retas distintas e não colineares $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Podemos, neste caso, definir a multiplicação do ângulo $\angle AOB$ pelo número real λ $(0 < \lambda < 1)$ como sendo qualquer ângulo congruente ao ângulo $\angle AOC$ da proposição. Definimos a razão entre os ângulos $\angle AOC$ e $\angle AOB$ como sendo esse número λ e denotamos $\lambda = \angle AOC \div \angle AOB$.

Isto jáé suficiente para introduzir a noção de medida de ângulos, ou seja, de transferidores.

Proposição 10 (Transferidores) *Existe uma função que associa a cada ângulo uma medida entre 0 e 180 (medida em graus), tal que ângulos congruentes têm mesma medida, ângulos retos medem 90, e se* $\angle CPD = \angle AOB + \angle EQF$*, então* $m(\angle CPD) = m(\angle AOB) + m(\angle EQF)$*.*

Demonstração: Vamos chamar de m a função desejada.

Associamos primeiramente a todos os ângulos retos o número real 90 (*medida em graus*).

Seja $\angle AOB$ um ângulo reto. Então $m(\angle AOB) = 90$.

Para todo ângulo agudo $\angle CPD$, seja $\lambda = \angle CPD \div \angle AOB$. Associamos ao ângulo $\angle CPD$ a medida $m(\angle CPD) = 90\lambda$.

Para todo ângulo obtuso $\angle CPD$, escrevemos $\angle CPD = \angle AOB + \angle AOC$, com $\angle AOB$ reto e $\angle AOC$ agudo. Definimos $m(\angle CPD) = 90 + m(\angle AOC)$.

Agora fica fácil mostrar que se $\angle CPD = \angle AOB + \angle EQF$, então vale a igualdade $m(\angle CPD) = m(\angle AOB) + m(\angle EQF)$. (Exercício.) $\square$

Uma **Geometria Métrica** é uma geometria com régua graduada e um transferidor, ou seja, em que fizemos a escolha de uma régua para cada linha e uma medida de ângulos.

O próximo capítulo tratará da Geometria Métrica Neutra, postulando a existência das réguas e transferidores.

2.5.3 Outras noções de completitude

Como já observamos anteriormente, na obra de Euclides aparece implicitamente em sua primeira proposição, de como construir um triângulo equilátero, que o par de circunferências, uma de centro A e abertura (ou raio) $\overline{AB}$, e outra de centro B e mesma abertura, encontram-se em pelo menos um ponto.

Uma grande parte dos *Elementos* de Euclides desenvolve as chamadas construções com régua e compasso. Para justificar essas construções, não é necessário todo o poder contido no Postulado de Completitude de Dedekind, mas um bem mais fraco:

Postulado de Completitude Euclideano: Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, incidentes a um plano Π, e tais que $A - / = B - C - / = D$ (isto é $A - B - C$ e $B - C - D$, ou $A - B - D$ e $C = D$, ou $A - C - D$ e $A = B$, ou ainda $A = B$ e $C = D$), então existe um ponto $E \cdot \mathrm{I} \cdot \pi$, tal que $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{BD}$.

Falando de outro modo, a circunferência de centro A e raio $\overline{AC}$ tem um ponto em comum com a circunferência de centro D e raio $\overline{BD}$. Observe que qualquer segmento que represente a soma de segmentos $\overline{AC} + \overline{BD}$ é maior do que o segmento $\overline{AB}$.

Uma leitura cuidadosa do Primeiro Livro dos *Elementos* de Euclides mostra que esse postulado é suficiente para justificar as construções em que se deve apelar para um postulado de completitude.

Exemplo 10: Para verificarmos que esse postulado é realmente mais fraco do que o Postulado de Completitude de Dedekind, consideremos o conjunto $\mathbb{R}((X))$ das séries formais na variável X e com potências racionais, ou seja, expressões da forma

$$f(X) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k X^{k/L},$$

com $L, N \in \mathbb{N}$ fixos, e cada $a_k \in \mathbb{R}$, ordenado da seguinte maneira: se $f(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} a_k X^{k/L}$ e $a_{-M} < 0$, então $f(X) < 0$; se $a_{-M} > 0$, então $f(X) > 0$; mais geralmente, se $f(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} a_k X^{k/L}$ e $g(X) = \sum_{k=-N}^{\infty} b_k X^{k/L'}$ (podemos trocar os denominadores L e L' e acrescentar coeficientes nulos, se necessário, e ficar com expressões para f e g com um mesmo denominador, L nos expoentres de X), então $f(X) < g(X)$ se, e somente se $g(X) - f(X) > 0$. Aqui, essa diferença é feita por monômios, $(b_k - a_k)X^{k/L}$, considerando a possibilidade de alguns dos coeficientes ser zero.

Por exemplo $0 < X \ X < 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; daí, $X^{-1} = 1/X > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$; $X^{1/2} < X$, etc.

A soma e produto de tais séries é feita formalmente, de modo análogo à soma e ao produto de polinômios (observe que, no produto de $f(X)$ com

$g(X)$, escrevendo $M = N$, completando com coeficientes nulos se necessário, cada monômio $X^{k/L}$ terá como coeficiente a soma $\sum_{j=-M}^{k+M} a_j b_{k-j}$; veja a ilustração na Tabela 2.1).

$$\begin{array}{ll}
a_{-M}X^{-M/L} + a_{(-M+1)}X^{(-M+1)/L} + \dots & \\
b_{-M}X^{-M/L} + b_{-M+1}X^{(-M+1)/L} + \dots & \times \\
\hline
a_{-M}b_{-M}X^{-2M/L} + (a_{-M+1}b_{-M} + b_{-M+1}a_{-M})X^{(-2M+1)/L} + \dots &
\end{array}$$

Tabela 2.1: Produto de duas séries

Os pontos do modelo de geometria (plana) que estamos desenvolvendo agora são os pares ordenados de elementos de $\mathbb{R}((X))$. As retas são as soluções $(x, y) \in \mathbb{R}((X))^2$ de equações $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}((X))$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.

A relação de incidência é a pertinência do ponto ao conjunto solução da equação de uma reta.

A relação de ordem entre três pontos imita aquela da geometria analítica, e pode ser descrita como: se $a \neq 0$ na equação da reta $r : ax + by + cz = 0$ (que não pode ser paralela ao eixo das abscissas – ou da primeira coordenada dos pontos), a ordem entre três pontos distintos nessa reta é a ordem obtida da ordenada (segunda coordenada); analogamente, se $b \neq 0$ na equação da reta $r : ax + by + cz = 0$ (que não pode ser paralela ao eixo das ordenadas – ou da segunda coordenada) a ordem entre três pontos distintos nessa reta é a ordem obtida da abscissa. Fica como exercício a verificação= de que não há contradição no caso em que tanto $a \neq 0$ quanto $b \neq 0$, com o usos de cada um desses critérios.

A relação de congruênciade segmentos é dada por: se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ forem quatro pontos desse plano, então $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ se, e somente se,

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2.$$

A relação de congruência de ângulos usa a idéia da lei dos cossenos, que será explicada mais adiante. Basta aceitar aqui a fórmula $\angle AOB \equiv \angle CPD$, sendo que $A = (a_1, a_2)$, $O = (o_1, o_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $P = (p_1, p_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ se, e somente se,

$$\frac{(a_1 - o_1)(b_1 - o_1) + (a_2 - o_2)(b_2 - o_2)}{\sqrt{(a_1 - o_1)^2 + (a_2 - o_2)^2}\sqrt{(b_1 - o_1)^2 + (b_2 - o_2)^2}} =$$

$$= \frac{(c_1 - p_1)(d_1 - p_1) + (c_2 - p_2)(d_2 - p_2)}{\sqrt{(c_1 - p_1)^2 + (c_2 - p_2)^2}\sqrt{(d_1 - p_1)^2 + (d_2 - p_2)^2}}.$$

Com isso, este é um modelo da geometria neutra, com a exceção do Postulado da Completitude de Dedekind. É um projeto interessante fazer a verificação de cada postulado de geometria neutra plana nesse modelo.

Exercício 21: Mostremos que nesse modelo não vale o Postulado da Completitude de Dedekind. Tomemos a reta r de equação $y = 0$ (o eixo das abscissas). Seja $X = \{(x, 0) \cdot \mathrm{I} \cdot r : \text{existe } m \in \mathbb{N}, \text{ tal que } x < n\}$ e $Y = \{(x, 0) \cdot \mathrm{I} \cdot r : \text{para qualquer que seja } n \in \mathbb{N},\ x > n\}$. Postulado da Completitude de Dedekind. Verifique que não existe nenhum ponto $P \cdot \mathrm{I} \cdot r$, tal que $X \leq P \leq Y$.

Para mostrarmos que nesse modelo vale o Postulado de Completitude Euclideano, precisamos primeiro verificar que podemos extrair uma raiz quadrada de uma série, obtendo também uma série.

Proposição 11 *Seja $f(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} a_k X^{k/L} \in \mathbb{R}((X))$, tal que $a_{-N} > 0$. Então existe $g(X) \in \mathbb{R}((X))$, tal que $g^2 = f$.*

Demonstração: Se escrevermos $g(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} b_k X^{k/(2L)}$, escrevemos a expressão para $g(X)^2$, e comparamos os coeficientes com os de $f(X)$, obtendo um sistema recorrente de equações:

$b_{-M}^2 = a_{-M}$, ou $b_{-M} = \sqrt{a_{-M}}$;

$2b_{-M+1}b_{-M} = 0$ (coeficiente de $X^{(-M+1)/(2L)}$, que não aparece em $f(X)$), ou seja, $b_{-M+1} = 0$;

$2b_{-M+2}b_{-M} + b_{-M+1}^2 = 2b_{-M+2}b_{-M} = a_{-M+1}$, ou $b_{-M+2} = a_{-M+1}/\sqrt{a_{-M}}$;

$2(b_{-M+3}b_{-M} + b_{-M+2}b_{-M+1}) = 2b_{-M+3}b_{-M} = 0$, ou seja, $b_{-M+3} = 0$.

Esse padrão já nos permite antever que $b_{-M+2k+1} = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Assim, suponhamos que já tenham sido obtidos os valores de b_{-M+2k}, para $0 \leq k \leq N$. Da equação comparando os coeficientes de X^{-M+N+1}, obtemos que

$$b_{-M+2(N+1)} = -\frac{\sum_{k=1}^{N} b_{-M+2k} b_{-M+2(N+1)-2k}}{\sqrt{a_{-M}}}.$$

Com isto, obtemos $g = \sqrt{f}$. $\square$

Com isto, podemos resolver qualquer equação de segundo grau (com discriminante não negativo) em $\mathbb{R}((X))$, e isso é o que usaremos para mostrar que nesse modelo vale o Postulado da Completitude Euclideana.

Proposição 12 *ados quatro pontos distintos A, B, C e D em $\mathbb{R}((X))^2$, tais que $A - / = B - C - / = D$, então existe um ponto $E \in \mathbb{R}((X))^2$, tal que $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{BD}$.*

Demonstração: Mostremos primeiramente essa asserção para o caso em que $A = (0,0)$, $B = (b,0)$, $C = (c,0)$ e $D = (d,0)$, com $b, c, d \in \mathbb{R}((X))$ e $0 \leq b < c \leq d$. Um dos pontos desejados é solução de duas equações de segundo grau $x^2 + y^2 = c^2$ e $(x-d)^2 + y^2 = b^2$, o que se reduz a resolver a equação $(x-d)^2 - (x^2 - c^2) = b^2$, ou $x = (c^2 + d^2 - b^2)/2d$ e $y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$, que sabemos ser possível operar em $\mathbb{R}((X))$.

O caso geral é análogo a esse, pois podemos escrever $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ e resolvermos o par de equações $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (c_1-a_1)^2 + (c_2-a_2)^2$ e $(x-d_1)^2 + (y-d_2)^2 = (b_1-d_1)^2 + (b_2-d_2)^2$, isolando y^2 da primeira equação e substituindo na segunda. $\square$

Uma outra possibilidade para o Postulado da Completitude é devido ao Matemático e Lógico Polonês Alfred Tarski, e será discutido na Seção 7.4.

Capítulo 3

Geometrias Métricas

3.1 Introdução

Vamos desenvolver um pouco da geometria métrica neutra, sem assumir nenhum postulado de paralelismo.

3.1.1 Réguas

Vimos que para cada linha reta ℓ, existe (pelo menos) uma função $f : \ell \to \mathbb{R}$ bijetora, chamada de régua de ℓ (ou seja, f é uma regra que associa a cada ponto P de ℓ um único número real $f(P)$ e, dado um número real $r \in \mathbb{R}$, existe um único ponto Q de ℓ associado a r, $f(Q) = r$.)

Vamos assumir que já tenhamos escolhido uma régua para cada reta, preservando congruência.

É como se as linhas fossem traçadas com uma régua graduada (talvez um pouco torta, dependendo da geometria). A ponta do lápis em cada instante estará em cima de um ponto de ℓ e o número que aparece na régua nesse lugar é o valor associado ao ponto.

Usamos essas réguas para definir uma **distância** $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$, sendo f a régua escolhida para a linha r_{PQ}.

Exercício 22: Na geometria analítica, dada uma reta r de equação $ax+$

$by = c$, escolhemos dois pontos arbitrários $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ tais que $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 1$; qualquer outro ponto $R = (x, y)$ desta reta é determinado obtendo um número real t tal que $(x, y) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Neste caso, definimos $f(R)$ como o valor t obtido. No caso de $R = P$, temos que $t = 0$ e se $R = Q$, $t = 1$. Mostre que f é uma régua para r.

Verifique que a distância entre os pontos $U = (u_1, v_1)$ e $V = (u_2, v_2)$ (definida a partir da régua) nesta geometria é

$$d(U, V) = d_E(U, V) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}.$$

Solução e/ou Sugestão: Primeiro vamos mostrar que para cada ponto (x_2, y_2) da reta $ax + by = c$ existe um único t tal que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Com isto, obtemos um sistema linear de duas equações a uma incógnita t

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)\, t &= x_2 - x_0 \\ (y_1 - y_0)\, t &= y_2 - y_0 \end{cases}$$

e precisamos mostrar que tem uma única solução. Como $P \neq Q$, então ou $x_1 \neq x_0$, ou $y_1 \neq y_0$. No primeiro caso, podemos isolar t da primeira equação, obtendo $t = (x_2 - x_0)/(x_1 - x_0)$. Daí, substituímos na segunda equação para ver se é um sistema possível de resolver; usando a equação da reta $ax+by = c$, como $x_1 \neq x_0$, a reta não pode ser vertical. Por isso, o coeficiente $b \neq 0$ e podemos isolar y em função de x, obtendo $y = (c - ax)/b$; assim temos que $y_2 = (c - ax_2)/b$ e $y_0 = (c - ax_0)/b$. Portanto, substituindo t na segunda equação, temos

$$(y_1 - y_0)t = (y_1 - y_0)\frac{(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = (x_2 - x_0)\frac{(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = -\frac{a}{b}(x_1 - x_0) = y_2 - y_0,$$

ou seja, o sistema é possível e determinado e portanto tem uma única solução. No caso em que $x_0 = x_1$, devemos ter que $y_0 \neq y_1$, e argumentamos de modo análogo.

Agora, dado $r \in \mathbb{R}$, precisamos mostrar que o ponto R de coordenadas $(x_3, y_3) = (x_0, y_0) + r(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ está na reta $ax + by = c$, ou seja, $ax_3 + by_3 = c$. Substituindo x_3 por $x_0 + r(x_1 - x_0)$ e y_3 por $y_0 + r(y_1 - y_0)$, e usando o fato que P e Q estão nesta reta, temos

$$ax_3 + by_3 = a[x_0 + r(x_1 - x_0)] + b[y_0 + r(y_1 - y_0)] \;=$$

$$= (1-r)(ax_0 + by_0) + r(ax_1 + by_1) = (1-r)c + rc = c,$$

ou seja, $R = (x_3, y_3)$ também está na reta.

Para verificar a fórmula da distância, sejam $r = f(U)$ e $s = f(V)$ os valores da régua correspondentes. Então $U = (u_1, v_1) = (x_0, y_0) + r(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ e $V = (v_1, v_2) = (x_0, y_0) + s(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ e $d(U, V) = |r - s|$. Subtraindo as duas equações, obtemos $(u_1 - v_1, u_2 - v_2) = (r - s)(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Elevando ao quadrado cada coordenada e somando as duas, temos $(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = (r - s)^2[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] = (r - s)^2$, pois escolhemos P e Q de modo que $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 1$; tirando as raízes quadradas, temos

$$d(U, V) = |r - s| = \sqrt{(r - s)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

que é o que queríamos mostrar. $\square$

Exercício 23: A **Geometria do Taxista** tem o plano e as linhas da geometria analítica mas com as réguas definidas por $f(P) = y$ se r é uma reta vertical (de equação $x = a$) e (a, y) são as coordenadas de P e $f(P) = (1 + |m|)x$ se r for uma reta não vertical, de equação $y = mx + b$, e (x, y) forem as coordenadas de P. Verifique que nos dois casos f é realmente uma régua.

Verifique que $d(P, Q) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$ nesta geometria, sendo $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$.

Exercício 24: Na geometria hiperbólica, dada uma linha da forma $r_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$, defino $f(P) = |\ln(y)|$, sendo que (a, y) é a coordenada de P, e para uma linha da forma $r_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$, defino

$$f(P) = \left|\ln\left(\frac{x - p + r}{y}\right)\right|,$$

sendo (x, y) as coordenadas de P. Mostre que em ambos os casos f é uma régua. No caso de $r_{p,r}$, dado o número real t, o ponto P tal que $f(P) = t$ tem coordenadas (x, y) com $x = p + r\,\mathrm{tgh}\,(t)$ e $y = r\,\mathrm{sech}\,(t)$, sendo que

$$\mathrm{tgh}\,(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \quad \text{e} \quad \mathrm{sech}\; t = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$

Verifique que a distância nesta geometria é dada por $d(P,Q) = |\ln(d/b)|$ se P tem coordenadas (a,b) e Q tem coordenadas (a,d) (estão na mesma linha vertical) e por

$$d(P,Q) = \left|\ln\left(\frac{d(a-p+r)}{b(c-p+r)}\right)\right|,$$

se P tem coordenadas (a,b) e Q tem coordenadas (c,d), com $a \neq c$ (estão na mesma linha $r_{p,r}$).

Exercício 25: No plano de Moulton, definimos $f : r \to \mathbb{R}$ por $f(P) = y$ se r é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a,y) são as coordenadas de P, f como na geometria analítica para $r_{m,b}$ com $m < 0$ e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1+4m^2} & \text{se } a < 0 \\ a\sqrt{1+m^2} & \text{se } a \geq 0, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a,b) e está na linha quebrada $r^*_{m,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2mx + p \text{ se } x < 0 \text{ e } y = mx + p \text{ se } x \geq 0\}$ (com $m \geq 0$). Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ é

$$d(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,(0,p)) + d_E((0,p),Q) & \text{se } ac < 0 \\ d_E(P,Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que a condição $ac < 0$ significa que os pontos P e Q estão em lados opostos do eixo Oy.

Exercício 26: No plano rasgado, definimos $f : r \to \mathbb{R}$ por $f(P) = y$ se r é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a,y) são as coordenadas de P e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1+m^2} & \text{se } a < 0 \\ (a-1)\sqrt{1+m^2} & \text{se } a \geq 1, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a,b) e está na linha quebrada $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + p \text{ e } x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$. Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ é

$$d(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,(0,p)) + d_E((1,m+p),Q) & \text{se } a < 0 \text{ e } c \geq 1, \text{ ou } c < 0 \text{ e } a \geq 1 \\ d_E(P,Q) & \text{demais casos.,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que as condições $a < 0$ e $c \geq 1$, ou $c < 0$ e $a \geq 1$ significam que os pontos P e Q estão em lados opostos da faixa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\}$, retirada de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 27: Mostre que $P - Q - R$ (Q **está entre** P e R) se $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$.

O próximo resultado diz que podemos deslocar uma régua sobre uma reta.

Proposição 13 *Em uma geometria métrica, dada uma linha r e sua régua $f : r \to \mathbb{R}$, então:*

(a) *se A é ponto de r e $g, h : r \to \mathbb{R}$ são definidas por $g(P) = f(P) - f(A)$ e $h(P) = -f(P) + f(A)$, então g e h também são réguas de r compatíveis com a distância;*

(b) *se $k : r \to \mathbb{R}$ é uma régua compatível com a distância, então existe um ponto A de r tal que $k = g$ ou $k = h$ do item anterior;*

(c) *se $P - Q - R$ pela régua f então $P - Q - R$ por qualquer outra régua g de r compatível com a distância.*

Demonstração:

(a) Temos que mostrar que se P e Q estão em r, $d(P, Q) = |g(P) - g(Q)| = |h(P) - h(Q)|$. Sabemos que $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$. Com isto, temos $|g(P) - g(Q)| = |[f(P) - f(A)] - [f(Q) - f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$ e $|h(P) - h(Q)| = |[-f(P) + f(A)] - [-f(Q) + f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$, como queríamos mostrar.

(b) Seja A em r tal que $k(A) = 0$. Então, para cada ponto P de r, $d(A, P) = |k(P) - k(A)| = |k(P)| = |f(P) - f(A)|$. Tirando os módulos, ou $k(P) = f(P) - f(A) = g(P)$ ou $k(P) = -[f(P) - f(A)] = h(P)$, como queríamos mostrar.

(c) Suponhamos que $f(P) < f(Q) < f(R)$. Então, dado um ponto A de r e subtraindo o número real $f(A)$ de cada termo, temos $f(P) - f(A) < f(Q) - f(A) < f(R) - f(A)$, ou seja $g(P) < g(Q) < g(R)$; se multiplicarmos por -1, invertemos as desigualdades, obtendo $-f(R) + f(A) < -f(Q) + f(A) < -f(P) + f(A)$, ou seja $h(R) < h(Q) < h(P)$. Em ambos os casos, permanece a relação $P - Q - R$, como queríamos mostrar. $\square$

Exercício 28: Dados A e B dois pontos distintos de uma linha r, mostre que existe uma régua f de r tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$.

Proposição 14 *Mostre que se P, Q e R são pontos distintos de uma linha r, então$P - Q - R$ se, e somente se, $d(P,R) = d(P,Q) + d(Q,R)$.*

Demonstração: Se $P - Q - R$, então $f(P) < f(Q) < f(R)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q) - f(P) < f(R) - f(P)$ e $0 < f(R) - f(Q)$, e $d(P,R) = |f(P) - f(R)| = f(R) - f(P) = f(R) - f(Q) + f(Q) - f(P) = |f(R) - f(Q)| + |f(Q) - f(P)| = d(P,Q) + d(Q,R)$; ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q) - f(R) < f(P) - f(R)$ e $0 < f(P) - f(Q)$ e $d(P,R) = |f(P) - f(R)| = f(P) - f(R) = f(P) - f(Q) + f(Q) - f(R) = |f(P) - f(Q)| + |f(Q) - f(R)| = d(P,Q) + d(Q,R)$, como queríamos mostrar.

Para a recíproca, suponhamos que $d(P,R) = d(P,Q) + d(Q,R)$. Como os três pontos são distintos, as únicas ordens comp-atíveis com tal fórmula são $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, pois, por exemplo, se $f(R) < f(P) < f(Q)$, então $d(P,R) = f(P) - f(R) < f(Q) - f(R) = d(Q,R) < d(Q,R) + d(P,Q)$.

(Verifique as outras possibilidades.) $\square$

Exercício 29: Verifique que se $P = (-3,3)$, $Q = (1,5)$ e $R = (4,4)$ estão em $\mathbb{H}$, então $P - Q - R$ na geometria hiperbólica.

Exercício 30: Verifique que se $P = (-1,-3)$, $Q = (0,-1)$ e $R = (1,0)$ então $P - Q - R$ no plano de Moulton. (Ache $m > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que estes pontos estejam na linha $r^*_{m,b}$.)

Exercício 31: Mostre que se A e B são pontos distintos em uma linha r, mostre que exite uma régua f de r tal que $\overrightarrow{AB} = \{P \in r : f(P) \geq 0\}$.

Exercício 32: Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então:

(a) (Soma de segmentos) exite um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $A - B - P$ e $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a soma do segmento $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$.)

(b) (Diferença de segmentos) exite um único ponto P em $\overrightarrow{BA}$ tal $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a diferença entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.)

(c) Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, exite uma régua f de r_{AB} tal que $f(A) = 0$, $f(B) > 0$ e $f(P) = f(B) + d(C, D)$, no caso da soma dos segmentos e $f(P) = f(B) - d(C, D)$, no caso da diferença dos segmentos.

3.1.2 Ângulos

Vamos estabelecer aqui os outros critérios de congruênciade triângulos para uso futuro.

Proposição 15 *Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, cada uma das condições abaixo relacionadas implicam na congruência desses dois triângulos:*

1. ***(Ângulo-Lado-Ângulo: ALA)*** $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ *e* $\angle ACB \equiv \angle DFE$;
2. ***(Lado-Lado-Lado: LLL)*** $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ *e* $\overline{CA} \equiv \overline{FD}$;
3. ***(Lado-Ângulo-Ângulo oposto: LAAo)*** $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ *e* $\angle BAC \equiv \angle EDF$.

Demonstração: A ideia a ser explorada aqui é tentar sobrepor uma cópia do $\triangle ABC$ sobre o $\triangle DEF$.

Faremos apenas o primeiro caso, deixando os outros dois como exercício.

Vamos supor que não valha a congruência para chegarmos a uma contradição. Podemos supor que, por exemplo, $AB < DE$. Seja $G \in \overline{DE}$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{EG}$.

Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle GEF$. Devido a isto, $\angle EFD \equiv \angle BCA \equiv \angle EFG$. No entanto, como o ponto G fica no interior do ângulo $\angle EFD$, este não pode ser congruente ao ângulo $\angle EFG$, a contradição buscada. $\square$

Exercício 33: Faça as demonstrações restantes.

Na verdade, esses enunciados que envolvem congruência de lados e também ângulos, implicando a congruência dos triângulos, são equivalentes ao postulado LAL. As demonstrações imitam aquela apresentada.

Exercício 34: Mostre que ALA implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos.

Exercício 35: Mostre que LAAo implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos.

Observação: Não se sabe ainda se LLL implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos. Mas, se pudermos construir triângulos congruentes a um triângulo dado, em qualquer parte do espaço, então a implicação vale.

Exercício 36: Mostre que LLL implica LAL, assumindo os outros postulados de incidência, ordem e congruência de segmentos e mais um postulado que diz:

> Dados o triângulo $\triangle ABC$, um plano π, um segmento $\overline{DE}$ em π, um dos lados H do plano π em relação à reta ℓ_{DE}, existe um único ponto F em π, tal que $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$.

Exercício 37: Mostre que LAL é equivalente ao seguinte enunciado:

> (Reflexões por um plano) Dado um plano π, seja Φ_π a função que fixa cada ponto de π e se P não estiver em π, $Q = \Phi_\pi(P)$ é o ponto tal que a reta ℓ_{PQ} seja perpendicular a π, contendo o ponto R de π, e tal que $P-R-Q$ e $\overline{PR} \equiv \overline{RQ}$. Então Φ_π é uma isometria, ou seja, preserva distâncias e ângulos: $d(P,Q) = d(\Phi_\pi(P), \Phi_\pi(Q))$ e $\angle ABC \equiv \angle \Phi_\pi(A)\Phi_\pi(B)\Phi_\pi(C)$.

Assumiremos que existem transferidores, ou seja, uma função m que associa a cada ângulo $\angle AOB$ um número real $m(\angle AOB) \in]0, 180[$, respeitando congruências e soma de ângulos.

Sejam A, B, C, D e O pontos de um plano π, tais que $A - O - C$, $B - O - D$, e tal que $\overline{AC}$ não seja colinear com $\overline{BD}$. Dizemos que o ângulo $\angle AOB$ é suplementar do ângulo $\angle BOC$, e vice-versa.

Exercício 38: Mostre que se o ângulo $\angle AOB$ for suplementar do ângulo $\angle BOC$, então $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180$. NMostre também a recíproca.

Exercício 39: Sejam A, B, C, D e O pontos de um plano π, tais que $A - O - C$, $B - O - D$, e tal que $\overline{AC}$ não seja colinear com $\overline{BD}$. Mostre que $\angle AOB \equiv \angle COD$. Cuidado: isto não é óbvio. Considere os ângulos suplementares.

3.2 Desigualdades Geométricas

Vamos desenvolver algumas desigualdades envolvendo ângulos e medidas de segmentos. Para facilitar o entendimento, vamos estabelecer algumas notações relativas a comparações de tamanhos de segmentos e ângulos.

NOTAÇÕES: Se $d(A, B) < d(C, D)$, escreveremos $AB < CD$ (sem as barras); se $d(A, B) \leq d(C, D)$, escreveremos $AB \leq CD$; se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, escreveremos $AB = CD$; se $d(A, B) = d(C, D) + d(E, F)$, escreveremos $AB = CD + EF$; se $m(\angle AOB) < m(\angle CPD)$, escreveremos $\angle AOB < \angle CPD$ e se $m(\angle AOB) \leq m(\angle CPD)$, escreveremos $\angle AOB \leq \angle CPD$.

Exercício 40: Dados $A - B - D$, e C fora de r_{AB}, mostre que $\angle BAC < \angle DBC$ e $\angle ACB < \angle DBC$.

Solução e/ou Sugestão: Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, e seja E tal que $A - M - E$ e $\overline{AM} \equiv \overline{ME}$. Então $\triangle AMC \equiv \triangle EMB$ (por quê?) e E está no interior de $\angle DBC$ (por quê?). Como $\angle ACB \equiv \angle EBC$, $\angle ACB < \angle DBC$.

Para a outra desigualdade, seja F tal que $C - B - F$. Então $\angle DBC \equiv \angle FBA$. Pelo mesmo argumento acima, mostramos que $\angle BAC < \angle DBC$ (faça isto!).

Exercício 41: Mostre que se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os dois ângulos opostos a estes lados também não são congruentes. Mostre que o maior entre estes dois ângulos é oposto ao maior entre os dois lados em questão.

Solução e/ou Sugestão: Dado o triângulo $\triangle ABC$, suponha que $AB > AC$. Seja D o único ponto tal que $A-C-D$ e $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. Então o triângulo $\triangle ABD$ é isósceles e $\angle ADB \equiv \angle ABD$. Como C está no interior de $\angle ABD$, $\angle ABC < \angle ABD \equiv \angle ADB < \angle ACB$ (por quê?).

Exercício 42: Mostre a recíproca do exercício anterior, ou seja, se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos também não são congruentes e o maior destes lados é oposto ao maior destes ângulos.

Exercício 43: (Desigualdade Trangular I) Dado o triângulo $\triangle ABC$, mostre que $d(A, C) < d(A, B) + d(B, C)$ (ou seja $AC < AB + BC$).

Solução e/ou Sugestão: Seja D tal que $C-B-D$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BD}$. Então $\angle BAD \equiv \angle BDA$. Como B está no interior de $\angle CAD$, $\angle BDA \equiv \angle CAD > \angle BAD$ e, portanto, pelo exercício acima, $AC < AD = CB+BD = AB+BC$.

Exercício 44: (Desigualdade Trangular II) Dados os pontos A, B, e C, mostre que $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. (Considere os vários casos em que A, B e C são colineares, etc.)

Proposição 16 *Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\angle ABC > \angle DEF$, temos que $AC > DF$.*

Demonstração: Para isto, construímos o triângulo $\triangle HBC \equiv \triangle DEF$, com H do mesmo lado que A em relação a r_{BC} (por quê podemos construí-lo e por quê é único?). Como $\angle ABC > \angle DEF$, temos $\angle ABC > \angle HBC$. Pelas barras cruzadas, a semi reta $\overrightarrow{BH}$ cruza $\overline{AC}$ num ponto K. Podemos ter três casos, a saber, $B-H-K$, ou $H = K$, ou $B-K-H$. Construímos um triângulo auxiliar $\triangle ABM$ tal que M é o ponto em $\overline{AK}$ que está na bissetriz do ângulo $\angle ABH$ (pelas barras cruzadas). Por LAL e usando a hipótese

$\overline{AB} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{BH}$, temos que $\triangle ABM \equiv \triangle HBM$ e, portanto $\overline{AM} \equiv \overline{HM}$. Pela desigualdade triangular, $HC \leq HM + MC$. Nos casos em que $K \neq H$, temos $HC < HM + MC$, ou seja, $DF = HC < AM + MC = AC$. No caso em que $H = K$, a desigualdade $DF = HC < AC$ decorre do fato que $A - H - C$. $\square$

Exercício 45: Dado um triângulo $\triangle ABC$, tal que $AC \leq AB$, se $B - D - C$, mostre que $AD < AB$. (Para isto, mostre que $\angle ABC < \angle ADB$, etc.)

Exercício 46: Dado o triângulo isósceles $\triangle ABC$ (tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$), mostre que $m(\angle ABC) < 90$.

Exercício 47: Mostre que qualquer triângulo tem pelo menos dois ângulos internos agudos (isto é, medem menos que 90).

3.3 Triângulos Retângulos

Um triângulo é chamado de **triângulo retângulo** se um de seus ângulos internos for reto (ou seja, se medir 90). Os lados adjacentes ao ângulo reto são os **catetos** e o lado oposto a **hipotenusa**. Veremos que o famoso teorema de Pitágoras só vale na geometria euclideana.

Exercício 48: Mostre que o **Teorema de Pitágoras** vale na geometria analítica, isto é, mostre que dado o triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto $\angle BAC$, mostre que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (Use o produto escalar de vetores.)

Exercício 49: Mostre que o Teorema de Pitágoras não vale na geometria hiperbólica. (Considere o triângulo $\triangle ABC$ em $\mathbb{H}$ tal que $A = (0, 5)$, $B = (0, 7)$ e $C = (3, 4)$; calcule $d(A, B)$, etc.)

Exercício 50: Mostre que a hipotenusa é maior do que os catetos. Use isto para mostrar que o ponto de uma linha r mais próximo de um ponto P fora de r é o pé da perpendicular a r que passa por P.

Observação: Definimos a **distância** do ponto P à linha r como $d(P,r) = d(P,Q)$, sendo que $P = Q$, se $P \in r$, ou Q é o pé da perpendicular a r passando por P. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, seja $D \in r_{AB}$ o pé da perpendicular a r_{AB} passando por C. O segmento $\overline{CD}$ é uma **altura** de $\triangle ABC$.

Exercício 51: Mostre que $d(P,r) \leq d(P,R)$, se $R \in r$ e $d(P,r) = d(P,R)$ se, e somente se, $r_{PQ} \perp r$.

Exercício 52: Mostre que se $\overline{AB}$ é o maior lado de $\triangle ABC$ e $\overline{CD}$ é uma altura sobre o lado $\overline{AB}$, então $A - D - B$. (Compare ângulos opostos aos lados convenientes.)

Exercício 53: (LLA para triângulos retângulos) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ sejam retos, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Solução e/ou Sugestão: Seja $G \in r_{DF}$ tal que $G - D - F$ e $GD = AC$. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$ (por quê?). Como $BC = EF$, $EF = BC = EG$ e, portanto, o triângulo $\triangle EFG$ é isósceles, com $\angle DFE \equiv \angle DGE$. Por LAAo, $\triangle DEF \equiv \triangle DEG \equiv \triangle ABC$ (por quê?).

Exercício 54: Nem sempre vale o critério LLA para triângulos não retângulos, isto é, dado o triângulo $\triangle ABC$ não retângulo e tal que $BC < AC$, existe um triângulo $\triangle DEF$, tal que $\angle BAC \equiv \angle EDF$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$. Em que casos vale este critério? Basta acrescentar a hipótese de que $BC > AB$?

Solução e/ou Sugestão: Para isto, seja $\overline{AG}$ uma altura, com $G \in r_{BC}$. Então, ou $A - G - C$, ou $A - C - G$, pois $G \neq A$ e $G \neq C$, por não ser triângulo retângulo, e $G - A - C$ implicaria que $BC > AC$ (por quê?). Seja $E \in r_{AC}$ tal que $E - G - C$ e $EG = CG$. Então $E \in \overrightarrow{AC}$, pois se $E \notin \overrightarrow{AC}$, novamente teríamos $BC > AC$ (por quê?). Também temos que $E \neq A$ (por quê?). Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABE$ satisfazem as hipóteses $\angle BAC \equiv \angle BAE$, $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{BE}$, mas não são congruentes (por quê?).

Exercício 55: Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ sejam retos, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$, mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Solução e/ou Sugestão: Use LAAo.

Exercício 56: Dados $A \neq B$, seja $M \in \overline{AB}$ o ponto médio e seja r contendo M e perpendicular a r_{AB} e seja P um ponto qualquer. Mostre que $AP = BP$ se, e somente se, $P \in r$. (Isto é, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de A e B.)

Solução e/ou Sugestão: Mostre que se $P \in r_{AB}$ então $P = M \in r$ e se $P \notin r_{AB}$, desça uma perpendicular a r_{AB} passando por P, seja $N \in r_{AB}$ o pé da perpendicular. Mostre que $\triangle PNA \equiv \triangle PNB$ e conclua que $N = M$ e, portanto $P \in r$.

Exercício 57: Seja $\overrightarrow{BD}$ a bissetriz de $\angle ABC$ e sejam $E \in \overrightarrow{BA}$ e $F \in \overrightarrow{BC}$ os pés das perpendiculares passando por D. Mostre que $DE = DF$.

Exercício 58: Mostre que $\triangle ABC$ é isósceles se, e somente se, quaisquer duas das seguintes figuras são colineares:

(a) uma mediana de $\triangle ABC$;

(b) uma altura de $\triangle ABC$;

(c) uma mediatriz de $\triangle ABC$;

(d) uma bissetriz de $\triangle ABC$.

Solução e/ou Sugestão: São seis casos a serem considerados, (a) e (b), ou (a) e (c), ou etc. Por exemplo, seja M o ponto médio de $\overline{BC}$ e suponha que a mediana $\overline{AM}$ também é uma altura. Por LAL, $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$, etc.

3.4 Circunferências

Dado um ponto C e um número real $r > 0$, o conjunto $\mathbb{C} = \{P : d(P, C) = r\}$ é chamado de **circunferência**, sendo C chamado de seu **centro** e r o seu **raio**. Se $A, B \in \mathcal{C}$ são tais que $A{-}C{-}B$, então o segmento $\overline{AB}$ é chamado de **diâmetro** de $\mathbb{C}$ e $\overline{CA}$ de **segmento radial** ou, por um abuso de linguagem, também chamaremos de **raio** de $\mathbb{C}$; o **interior** de $\mathbb{C}$ é o conjunto $\mathsf{int}\,(\mathbb{C}) = \{P : d(P, C) < r\}$; o **exterior** de $\mathbb{C}$ é o conjunto $\mathsf{ext}\,(\mathbb{C}) = \{P : d(P, C) > r\}$. Vamos estudar algumas propriedades de circunferências usando apenas os postulados até agora listados (isto é, até o LAL).

NOTAÇÃO: Caso precisemos especificar o centro e o raio de $\mathbb{C}$, escreveremos $\mathbb{C}_{C,r}$.

Exercício 59: Mostre que o conjunto $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x^2 + (y - 5)^2 = 16\}$ é a circunferência de centro $(0, 3)$ e raio $\ln 3$ na geometria hiperbólica. Ou seja, a circunferência hiperbólica coincide com a euclideana, mas com seu centro deslocado para baixo. (Para isto, tome um ponto $(a, b) \in \mathbb{A}$ e mostre que $d((a, b), (0, 3)) = \ln 3$; divida em casos $a = 0$ e $a \neq 0$; neste último, ache $r_{p,r}$ tal que $(a, b) \in r_{p,r}$ e $(0, 3) \in r_{p,r}$, para calcular a distância; não esqueça de usar a equação $x^2 + (y - 5)^2 = 16$ para o ponto (a, b).)

Exercício 60: Esboce a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 na geometria do taxista. (Mostre que a equação que a define é $|x| + |y| = 1$.)

Exercício 61: Verifique que a circunferência de centro $(-1, 0)$ e raio 2 no plano de Moulton é descrita por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 4$, se $x \leq 0$ ou $y \leq 0$ e $4x + 8 = \sqrt{(x + 2)^2 + 4y^2} + \sqrt{x^2 + y^2(2 - x)^2}$, se $x > 0$ e $y > 0\}$.

Exercício 62: Voltando às geometrias que satisfazem LAL, dados três pontos P, Q e R não colineares e tais que as mediatrizes de $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ se encontram, mostre que existe uma única circunferência $\mathbb{C}$ contendo estes pontos.

Solução e/ou Sugestão: Seja C o ponto de encontro das mediatrizes e $r = d(C, P)$. Por congruênciade triângulos (quais?), $CP = CQ = CR$ e, portanto $P, Q, R \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$. Para mostrar a unicidade de $\mathbb{C}$, suponha que

$P, Q, R \in \mathbb{C}_{D,s}$, para um ponto D e um número real $s > 0$. Sejam M o ponto médio de $\overline{PQ}$ e N o ponto médio de $\overline{QR}$. Então, por congruências de triângulos (quais?), $\overline{DM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e $\overline{DN}$ é perpendicular a $\overline{QR}$. Portanto $D = C$ e $s = r$ (por quê?).

Exercício 63: Mostre que se A e B são dois pontos da circunferência $\mathbb{C}_{C,r}$, mostre que C está na mediatriz de $\overline{AB}$.

Exercício 64: Mostre que uma circunferência $\mathbb{C}$ pode ser **circunscrita** num triângulo $\triangle ABC$ (isto é, seus vértices A, B e C estão em $\mathbb{C}$) se, e somente se, suas mediatrizes se encontram num ponto (e este ponto é chamado de **circuncentro** de $\triangle ABC$). Observe que na geometria hiperbólica existem triângulos em que isto não acontece.

Exercício 65: Mostre que $\mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$ é convexo. (Para isto, sejam $A, B \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$, $A \neq B$, e seja $D \in \overline{AB}$; mostre que $D \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$; considere dois casos: $C \in \overline{AB}$ e compare distâncias; $C \notin \overline{AB}$ e considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ e compare os lados.)

Uma linha r é dita uma **tangente** à circunferência $\mathbb{C}$ se $r \cap \mathbb{C}$ contém um único ponto.

Exercício 66: Mostre que se $A \in \mathbb{C}$ e C é o centro de $\mathbb{C}$, então a linha r perpendicular a $\overline{CA}$ e passando por A é uma tangente a $\mathbb{C}$. (Para isto, mostre que se $B \in r$ e $B \neq A$, então $CB > CA$.)

Exercício 67: Uma linha r é dita uma **linha secante** de $\mathbb{C}$, se ela intersecta $\mathbb{C}$ em mais de um ponto. Mostre que neste caso r encontra $\mathbb{C}$ em exatamente dois pontos A e B. (Separe em dois casos: r contém o centro e r não contém o centro.)

Exercício 68: Mostre que se r é uma tangente à circunferência $\mathbb{C}$ passando pelo ponto $A \in \mathbb{C}$, então r é perpendicular a $\overline{AC}$, sendo C o centro de $\mathbb{C}$.

Exercício 69: Mostre que para qualquer triângulo $\triangle ABC$, existe uma única circunferência $\mathbb{C}$ **inscrita** em $\triangle ABC$ (isto é, $\mathbb{C}$ é tangente aos três lados de $\triangle ABC$). (Mostre que o centro desta circunferência, chamado de **incentro** de $\triangle ABC$, é o ponto de encontro das bissetrizes de $\triangle ABC$.)

Exercício 70: Seja $f : r \to \mathbb{R}$ uma régua e $P \notin r$ um ponto. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = d(P,Q)$, sendo que $Q \in r$ e $f(Q) = x$. Mostre que h é contínua.

Solução e/ou Sugestão: Precisamos mostrar que para cada $x \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < \delta$, temos $|h(x+t) - h(x)| < \varepsilon$. (Lembre-se que isto é a definição de continuidade de uma função.)

Sejam $x \in \mathbb{R}$, $Q \in r$, tal que $f(Q) = x$, $\varepsilon > 0$, $R, S \in r$ tais que $R-Q-S$ e $d(R,Q) = d(S,Q) = \varepsilon$. Se $T \in \mathsf{int}\,(\overline{RS})$, então $d(T,Q) < \varepsilon$ (Q é o ponto médio de $\overline{RS}$). Pela desigualdade triangular aplicada aos pontos P, Q e T, temos $PQ+TQ \geq PT$ e $PT+TQ \geq PQ$. Destas duas desigualdades obtemos $PT - PQ \leq TQ$ e $PQ - PT \leq TQ$, donde segue que $|PQ - PT| \leq TQ$. Traduzindo isto em termos da função h, temos $|h(Q)-h(T)| < d(T,Q)$. Seja $t = f(T)-f(Q)$; então $f(T) = x+t$ e $d(T,Q) = |t|$; portanto $|h(Q)-h(T)| < |t|$. Se fizermos $\delta = \varepsilon$, obtemos que se $|t| < \delta = \varepsilon$ então $|h(Q) - h(T)| < \varepsilon$, como queríamos mostrar.

Exercício 71: Dados A, B e C não colineares e tais que $r_{AC} \perp r_{AB}$, e dado $r \in \mathbb{R}$ tal que $d(A,C) < r$, mostre que existe um ponto $D \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(C,D) = r$. (Para isto, seja $E \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(A,E) = r$; mostre que $d(C,E) > r$; use a função do exercício anterior para obter o resultado desejado; lembre-se do Teorema do Valor Intermediário, que diz que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, e $f(a) < f(b)$, se $f(a) \leq r \leq f(b)$ então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = r$.)

Exercício 72: Mostre que se r contém algum ponto do interior da circunferência $\mathbb{C}$, então r é uma linha secante de $\mathbb{C}$. (Para isto, desça uma perpendicular do centro C de $\mathbb{C}$ a r; seja A o pé da perpendicular; use o exercício acima.)

Exercício 73: Mostre que dada a circunferência $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$ e $P \in \mathsf{ext}\,(\mathbb{C})$, então existem exatamente duas linhas passando por P e tangentes a $\mathbb{C}$.

Solução e/ou Sugestão: Seja A o ponto de interseção entre o segmento $\overline{PC}$ e a circunferência $\mathbb{C}$. Seja $s = d(P, C)$; observe que $s > r$. A linha r perpendicular a $\overline{PC}$ pelo ponto A contém o ponto A, que está no interior de $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{C,s}$ e, portanto intersecta $\mathbb{D}$ em exatamente dois pontos R e S. Seja B o ponto de interseção de $\mathbb{C}$ e $\overline{CR}$ e D o ponto de interseção de $\mathbb{C}$ e $\overline{CS}$. Por LAL, $\triangle CBP \equiv \triangle CDP \equiv \triangle CAR$ (por quê?). Portanto $r_{PB} \perp \overline{CB}$ e $r_{PD} \perp \overline{CD}$, ou seja, r_{PB} e r_{PD} são tangentes a $\mathbb{C}$ e são duas linhas distintas.

Vamos mostrar agora que não existe outra linha tangente a $\mathbb{C}$, passando por P. Para isto, observe que se $X \in \mathbb{C}$, $X \neq A$ e $X \neq B$, então $X \in \mathsf{int}\,(\angle BPD)$ (por quê?). Portanto, se r contém P mas não intersecta $\mathsf{int}\,(\angle BPD)$, então também não intersecta $\mathbb{C}$. Se r intersecta $\mathsf{int}\,(\angle BPD)$, pelas barras cruzadas, r intersecta $\overline{BD}$, num ponto F tal que $B-F-D$. Mas $F \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C})$ (por quê?) e, portanto r é uma linha secante de $\mathbb{C}$. Portanto, só r_{PB} e r_{PD} são tangentes a $\mathbb{C}$.

Exercício 74: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos retângulos, com ângulos retos nos vértices A e D, respectivamente, tais que $BC = EF$, $AB > DE$. Mostre que $AC < DF$.

Solução e/ou Sugestão: Sejam $G \in \overrightarrow{DE}$ e $H \in \overrightarrow{DF}$ tais que $\triangle ABC \equiv \triangle DGH$. Como $AB > DE$, temos que $D - E - G$. Queremos mostrar que $D - H - F$ e, portanto $AC = DH < DF$. Para isto, vamos mostar que tanto $H = F$ quanto $D - F - H$ levam a uma contradição. Suponha que $H = F$; como $\angle DEH$ é agudo (por quê?), o ângulo suplementar $\angle GEH$ é obtuso e, portanto é o maior ângulo de $\triangle GEH$, o que implica que o lado oposto $\overline{GH}$ é o maior dos lados de $\triangle GEH$. Mas isto contradiz o fato que $GH = GF = BC = EF$. Se $D - F - H$, usando o triângulo $\triangle GFH$, pelo mesmo tipo de argumentação, obtemos uma contradição (como?).

Exercício 75: Dada a linha r, $A \in r$, $r > 0$ e H_1, um dos lados de r, seja h a função $h(x) = d(P, X)$, sendo que $X \in r$ é tal que $f(X) = x$, sendo $f : r \to \mathbb{R}$ uma régua de r tal que $f(A) = 0$ e $P \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{A,r}$ está em H_1 ou em r e também na linha perpendicular a r, passando por X. Mostre que o domínio de h é o intervalo fechado $[-r, r]$ e que h é contínua neste intervalo.

Solução e/ou Sugestão: Se $P \in \mathbb{C}$, $P \notin r$, e X é o pé da perpendicular a r passando por P, então X está no interior de $\mathbb{C}$ (por quê?) e, portanto,

$|f(X)| = |f(X) - f(A)| = d(X, A) < r$. Se $P \in \mathbb{C} \cap r$, então $|f(P)| = r$; finalmente, se $X \in r$ e $d(X, A) > r$, então a linha perpendicular a r e contendo X não intersecta a circunferência $\mathbb{C}$. Portanto o domínio de h é $[-r, r]$. Sejam $B, C \in r$ tais que $f(B) = -r$ e $f(C) = r$.

Para mostrar que h é contínua em cada $x \in [-r, r]$, dividiremos em dois casos, a saber, $-r \leq x \leq 0$ e $0 \leq x \leq r$.

Consideremos o caso em que $-r \leq x \leq 0$. Observe que se $-r \leq t < u \leq 0$, então $h(t) < h(u)$, pois se $T, U \in r$ são tais que $f(T) = t$, $f(U) = u$, sejam $P, Q \in \mathbb{C} \cap H_1$, tais que $\overline{PT} \perp r$ e $\overline{QU} \perp r$. Pelo exercício anterior, considerando os triângulos retângulos $\triangle ATP$ e $\triangle AUQ$, temos que $TP < UQ$ (por quê?). Portanto $h(t) = d(T, P) < d(U, Q) = h(u)$. Por outro lado, dado $s \in \mathbb{R}$, tal que $0 = h(-r) < s < h(0) = r$, existe $X \in r$ tal que $h(x) = s$, pois se $D \in H_1$ é tal que $\overline{DA} \perp r$ e $d(D, A) = s$, seja $X \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(X, D) = r$ (por quê tal ponto existe?). Então, considerando o triângulo retângulo $\triangle DAX$, temos que $AX < DX = AB$ (por quê?), ou seja, $B - X - A$. Seja $R \in \mathbb{C} \cap H_1$ tal que $\overline{RX} \perp r$. Por LAL, $\triangle DAX \equiv \triangle RXA$ e, portanto $h(x) = d(X, R) = s$, sendo $x = f(X)$. Ou seja, provamos que h é estritamente crescente em $[-r, 0]$ e que, para cada $s \in [0, r] = [h(-r), h(0)]$, existe algum $x \in [-r, 0]$, tal que $h(x) = s$. Vamos usar isto para mostrar que h é contínua em cada $x \in [-r, 0]$.

Primeiro, consideremos $x \in]-r, 0[$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $a, b \in]-r, 0[$, $a < h(x) < b$, $|h(x) - a| < \varepsilon$, $|h(x) - b| < \varepsilon$ e $t, u \in]-r, 0[$, tais que $h(t) = a$ e $h(u) = b$. Então, como provamos que h é crescente em $[-r, 0]$, temos que $t < x < u$. Seja $\delta = \min\{|x - a|, |x - b|\}$. Então se $|x - w| < \delta$, temos que $a < w < b$, e portanto, $|h(x) - h(w)| < \max\{|h(x) - a|, |h(x) - b|\} < \varepsilon$ (por quê?).

Ficam para os leitores tratarem dos casos em que $x = -r$, $x = 0$ e $x \in [0, r]$.

Proposição 17 *Sejam dados $0 < r, s < d(A, B) < r + s$. Então as circunferências $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,r}$ e $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,s}$ se encontram em dois pontos.*

Demonstração: Escolhemos um lado H_1 de r e definimos funções $h_{\mathbb{A}} : [-r, r] \to \mathbb{R}$ e $h_{\mathbb{B}} : [b - s, b + s] \to \mathbb{R}$ (com domínio deslocado de $b = f(B)$, sendo f uma régua de r tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$), $h_{\mathbb{A}}(x) = d(X, P)$, sendo $x = f(X)$, $P \in \mathbb{A} \cap (H_1 \cup r)$ e $\overline{PX} \perp r$ e $h_{\mathbb{B}}(y) = d(Y, Q)$, sendo $y =$

$f(Y)$, $Q \in \mathbb{B} \cap (H_1 \cup r)$ e $\overline{QY} \perp r$, como no exercício anterior. Como $0 < r, s < d(A, B) = b < r + s$, temos $b - s < r$, ou seja, a função $h(x) = h_{\mathbb{A}}(x) - h_{\mathbb{B}}(x)$ está definida no intervalo $[b - s, r]$. Neste intervalo, $h_{\mathbb{A}}$ é decrescente e $h_{\mathbb{B}}$ é crescente (por quê?). Temos que $h(b-s) = h_{\mathbb{A}}(b-s) - h_{\mathbb{B}}(b-s) = h_{\mathbb{A}}(b-s) > 0$ e que $h(r) = h_{\mathbb{A}}(r) - h_{\mathbb{B}}(r) = -h_{\mathbb{B}}(r) < 0$. Como h é contínua (pois é diferença de duas funções contínuas) e muda de sinal, existe $x \in [b - s, r]$, tal que $h(x) = 0$. Se $x = f(X)$, $X \in r$, então os pontos $P \in \mathbb{A} \cap H_1$ e $Q \in \mathbb{B} \cap H_1$, tais que $\overline{PX} \perp r$ e $\overline{QX} \perp r$ são tais que $d(P, X) = d(Q, X)$. Portanto $P = Q$. O outro ponto de encontro de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ é o ponto $R \in r_{PX}$ tal que $P - X - R$ e $PX = XR$ (por quê?). $\square$

Observação: O resultado anterior descreve uma propriedade importante do instrumento de desenho que traça circunferências, que é o **compasso**. De certo modo, podemos dizer que uma circunferência é uma *curva contínua*. Sua utilidade será explorada a seguir.

3.5 Construções com Régua e Compasso I

Um ponto importante em geometria, principalmente em aplicações práticas, são construções com réguas não graduadas e compassos. Alguns dos problemas mais famosos de tais tipos de construções são construções de polígonos regulares (isto é, todos os lados são congruentes e todos os ângulos são congruentes). Muitas das construções são válidas apenas na geometria analítica ou na geometria hiperbólica e outras são impossíveis. Por exemplo, na geometria analítica, o matemático francês E. Galois descobriu um critério geral de construtibilidade, estudado em cursos sobre a *Teoria de Galois* (por exemplo, Álgebra III do bacharelado). Vamos apenas descrever algumas construções possíveis comuns a todas as geometrias em que valem os postulados enunciados até agora (até LAL).

ATENÇÃO: Nesta seção, descrever as construções usando apenas uma régua não graduada e um compasso. Por exemplo, para construir uma linha, contruir dois pontos dela. Descrever as construções e mostrar que são corretas.

Exercício 76: (Construção de Triângulos) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > b$ e $a < c < a + b$, mostre que existe um triângulo $\triangle ABC$, tais que seus lados medem a, b e c. (Para isto, seja r uma linha, $A, B \in r$ dois pontos tais que $d(A, B) = c$ e seja H_1 um dos lados de r. Sejam $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,b}$ e $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,a}$ as circunferências de centros A e B e raios b e a, respectivamente; etc.)

Exercício 77: (Construção de Perpendiculares I) Dada uma linha r e um ponto $P \in r$, construir com compasso e régua uma linha $r_{AP} \perp r$. (Para achar um ponto A tal que $r_{AP} \perp r$, seja $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, sejam $B, C \in r$, tais que $B - P - C$ e $B, C \in \mathbb{C}_{P,r}$; seja $A \in \mathbb{C}_{B,2r} \cap \mathbb{C}_{C,2r}$; por quê tal A existe e $r_{AP} \perp r$?)

Exercício 78: (Construção de Perpendiculares II) Dada uma linha r e um ponto $P \notin r$, construir com compasso e régua uma linha $r_{AP} \perp r$. (Escolha um ponto $C \in r$ e trace a circunferência de centro P, contendo C, etc.)

Exercício 79: Dado o segmento $\overline{AB}$, construir com régua não graduada e compasso o ponto médio de $\overline{AB}$.

Exercício 80: Dado o triângulo $\triangle ABC$, achar o ponto D tal que $\square ABCD$ seja um quadrilátero convexo com $CD = AB$ e $AD = BC$.

Exercício 81: Dado o ângulo $\angle AOB$, achar sua bissetriz.

Observação: Nos *Elementos* de Euclides, os instrumentos de desenho são uma régua não graduada e um compasso que colapsa (se o tiramos do papel, perdemos sua abertura). Portanto só podemos construir uma circunferência se conhecermos seu centro e um ponto dela. Com isto, não é imediato construir um ponto B na semi-reta $\overrightarrow{AP}$ tal que $\overline{AB}$ seja congruente a um segmento $\overline{CD}$ dado. Por isso, as três primeiras Proposições dos *Elementos*, descrevem como obter tal segmento. A primeira descreve como obter um triângulo equilátero $\triangle ABC$, conhecendo seu lado $\overline{AB}$; a segunda descreve como obter um segmento $\overline{AB}$, dado o ponto A e congruente ao segmento $\overline{CD}$ também dado; por fim, a terceira descreve como construir $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, com $B \in \overrightarrow{AP}$, sendo dados $\overline{CD}$ e $\overrightarrow{AP}$. Vamos descrever tais construções no exercício seguinte.

Exercício 82: São dados o segmento $\overline{CD}$ e a semi-reta $\overrightarrow{AP}$. Construir um ponto E tal que $\triangle ACE$ seja equilátero (usando o exercício acima). Com centro em C, traçar a circunferência $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{C,r}$, sendo $r = d(C, D)$. Seja G o ponto de encontro entre $\overrightarrow{EC}$ e $\mathbb{A}$ (por tal ponto quê existe e é único?). Seja $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{E,s}$, sendo que $s = d(E, G)$. Seja $F \in \overrightarrow{EA} \cap \mathbb{B}$ (por tal ponto quê existe e é único?). Mostre que $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$. Seja $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{A,t}$, sendo $t = d(A, F)$ e seja $B \in \overrightarrow{AP} \cap \mathbb{D}$. Observe que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

3.6 Perpendiculares no espaço

Seja π um plano e r uma reta, tal que seja perpendicular a todas as retas $s > I > \pi$, que tenham um ponto em comum com a reta r. Dizemos neste caso que a reta r é perpendicular ao plano π.

O bom de uma definição é que podemos dizer qualquer coisa. Mas para ser útil, tem que existir o objeto definido.

Exercício 83: Mostre que, dadas duas retas r e s distintas e concorrentes em um ponto P (no espaço), existe um único plano π, tal que $r.I.\pi$ e $s.I.\pi$.

Comecemos com um resultado auxiliar.

Proposição 18 *Seja P um ponto comum às retas r_1 e r_2, distintas e contidas em um plano π. Suponha que s seja uma reta perpendicular a r_1 e a r_2 (necessariamente pelo ponto P). Então a reta s é perpendicular ao plano π.*

Demonstração: Precisamos mostrar que a reta s é perpendicular a todas as retas $r.I.\pi$ que contêm o ponto P.

Sejam $A, B.I.r_1$, $C, D.I.r_2$ e $E, F.I.s$, pontos tais que $A{-}P{-}B$, $C{-}P{-}D$, $E - P - F$ $\overline{AP} \equiv \overline{PB} \equiv \overline{CP} \equiv \overline{PD} \equiv \overline{EP} \equiv \overline{PF}$. Por LAL, $\triangle APC \equiv \triangle BPD$ e $\triangle APD \equiv \triangle BPC$. Por LLL, $\triangle ACE \equiv \triangle ACF \equiv \triangle BDE \equiv \triangle BDF$, e $\triangle ADE \equiv \triangle ADF \equiv \triangle BCE \equiv \triangle BCF$.

Dado que já sabemos que $s \perp r_1, r_2$, seja $r.I.\pi$ uma outra reta, tal que $s \perp r$.

Consideremos o caso em que existem pontos $G \in \overline{AC}$ e $H \in \overline{BD}$, tais que $G, H.I.r$. Tais pontos existem pelo Teorema das Barras Transversais.

Por ALA, temos que $\triangle APG \equiv \triangle BPH$. Por LAL, $\triangle AGE \equiv \triangle BHE$. Por fim, pelo critério LLL, $\triangle EPG \equiv \triangle EPH$. Isto quer dizer que $s \perp r$. $\square$

Agora provemos a existência de retas perpendiculares a planos.

Proposição 19 *Dado um plano π e um ponto $P.I.\pi$, existe uma reta r perpendicular ao plano π, tal que $P.I.r$.*

Demonstração: Sejam $r_j.I.\pi$, tal que $P.I.r_j$, para $j = 1, 2$ e $r_1 \perp r_2$.

Seja $\pi' \neq \pi$ um plano, tal que $r_1.I.\pi'$ (exercício: por que existe?). Seja $r_3.I.\pi'$, tal que $P.I.r_3$ e r_3 seja perpendicular a r_1 (observe-se que r_3 não precisa ser perpendicular ao plano π.

Seja π'' o único plano, tal que $r_2.I.\pi''$ e $r_3.I.\pi''$. Observe que, como $r_1 \perp r_2$ e $r_1 \perp r_3$, a reta r_1 é perpendicular ao plano π''.

Seja s a reta de π'', perpendicular à reta r_2, pelo ponto P.

Afirmamos que s é perpendicular ao plano π. Mas isso decorre do fato que $s \perp r_2$ e $s \perp r_1$ (esta última alegação decorre do fato acima observado de que $r_1 \perp \pi''$). $\square$

Agora consideremos o caso em que P esteja fora de π.

Proposição 20 *Dado um plano π e um ponto P fora de π, existe uma reta r perpendicular ao plano π, tal que $P.I.r$.*

Demonstração: Seja $Q.I.\pi$ um ponto qualquer e s a reta perpendicular a π e contendo o ponto P (dada pela proposição anterior). Se já ocorrer que $P.I.s$, já obtivemos o que esperávamos. Caso contrário, seja π' o único plano contendo r e π. Seja r_1 a reta comum aos dois planos. Seja s a reta em π', perpendicular a r_1 e contendo o ponto P.

Afirmamos que $s \perp \pi$, o que será deixado como exercício (tome uma reta r_2 em π, perpendicular a r_1 pelo ponto de encontro de r_1 e s e construa triângulos convenientes). $\square$

Exercício 84: Sejam π_1 e π_2 dois planos distintos, contendo a reta r em comum. Suponha que exista reta $r_1.I.\pi_1$, tal que $r_1 \perp \pi_2$. Mostre que se $s.I, \pi_1$ e $s \perp r$, então $s \perp \pi_2$.

3.7 Ângulos Diedrais

Sejam π_1 e π_2 dois planos distintos, contendo a reta r em comum. Seja H_1 um dos lados do plano π_1 em relação à reta r e H_2 um dos lados de π_2 em relação a r. Chamamos o conjunto composto dos pontos de r, H_1 e H_2 de **ângulo diedral**. Queremos associar a essa figura uma medida de ângulo. Comecemos primeiramente com um resultado preliminar.

Proposição 21 *Sejam $A, B \in H_1$, $C, D \in H_2$ e $P, Q \in r$, tais que $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{QB}$ e $\overrightarrow{QD}$ sejam perpendiculares à reta r. Então $\angle APC \equiv \angle BQD$.*

Demonstração: Acompanhe a demonstração olhando para a figura 3.1.

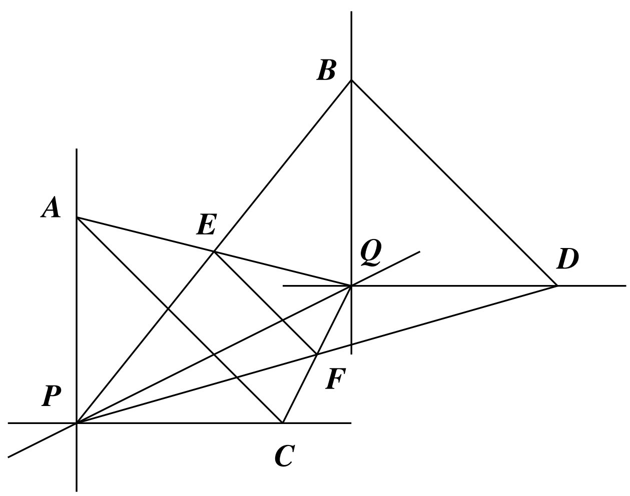

Figura 3.1: Invariância na medida de ângulos diedrais.

Podemos supor que os pontos escolhidos satisfaçam as congruências $\overline{PA} \equiv \overline{PC} \equiv \overline{QB} \equiv \overline{QD}$.

Vamos comparar os diversos triângulos.

Por LAL, $\triangle PAQ \equiv \triangle QBP \equiv \triangle PCQ \equiv \triangle QDP$.

Os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{QA}$ encontram-se em seu ponto médio E e os segmentos $\overline{PD}$ e $\overline{QC}$ encontram-se em seu ponto médio F.

Por LLL, $\triangle PEF \equiv \triangle QEF$, que são isósceles. Assim, $\angle EPF \equiv \angle EQF$.

Por LAL, $\triangle BPD \equiv \triangle AQC$.

Por fim, por LLL, $\triangle APC \equiv \triangle BQD$, o que implica que $\angle APC \equiv \angle BQD$. $\square$

Exercício 85: sejam π_1 e π_2 dois planos distintos, contendo uma reta r em comum. Quantos ângulos diedrais podem ser formados com esses dados?

3.8 Esferas

Uma esfera no espaço, de centro O e raio $r > 0$, é o conjunto $\mathcal{S} = \{P : d(P, O) = r\}$. O conjunto $\mathsf{int}\,(\mathcal{S}) = \{P : d(O, P) < r\}$ é o interior da esfera.

Exercício 86: Mostre que o interior de uma esfera é um conjunto convexo.

Uma reta r (e, respectivamente, um plano π) é **tangente** à esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$ se existir um único ponto P de $\mathcal{S}$ em r (respectivamente, em π). Essa definição de tangente só é boa devido ao fato que a esfera e seu interior formam um conjunto convexo, tal que o interior do segmento ligando dois pontos da esfera está contido no interior desta. Para conjuntos que não satisfaçam tal condição, essa definição terá que ser mudada!

Exercício 87: Seja P um ponto da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, com $r > 0$. Mostre que o plano π que contém P e é perpendicular à reta ℓ_{OP} é um plano tangente à esfera.

Exercício 88: Seja P um ponto da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, com $r > 0$. Mostre que a reta r que contém P e é perpendicular à reta ℓ_{OP} é uma reta tangente à esfera.

Proposição 22 *Sejam $r > 0$, O um ponto, $\mathcal{S} = \{X : d(X, O) = r\}$ uma esfera, e seja π um plano que contenha pelo menos dois pontos distintos em comum com a esfera $\mathcal{S}$. Então o conjunto dos pontos do plano que também estão nessa esfera é uma circunferência, cujo centro é o ponto P de π, tal que a reta $\ell_{OP} \perp \pi$.*

Demonstração: Seja $P.I.\pi$, tal que a reta $\ell_{OP} \perp \pi$. Seja Q um dos pontos de $\mathcal{S}$ que esteja em π. Como, por hipótese, existem pelo menos dois pontos distintos em π, que estão na esfera, os pontos P e Q são distintos. Considere a circunferência $\mathbb{C}$ em π de centro P e rai $\overline{PQ}$. Para cada ponto R em $\mathbb{C}$, LAL implica que $\triangle OPQ \equiv \triangle OPR$, ou seja, todos os pontos de $\mathbb{C}$ estão em $\mathcal{S}$. Comparando-se lados de triângulos, se Y for um ponto de π no interio0r de $\mathbb{C}$, então $OY < OQ$, e se Y estiver no exterior de $\mathbb{C}$ em π, $OY > OQ$. Assim, nenhum outro ponto do plano π pode estar em $\mathcal{S}$. $\square$

Proposição 23 *Sejam O_1 e O_2 dois pontos distintos, $r_1, r_2 > 0$ dois números reais, tais que $d(O_1, O_2) < r_1 + r_2$. Então as esferas $\mathcal{S}_1 = \{P : d(O_1, P) = r_1\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{P : d(O_1, P) = r_2\}$ intersectam-se em uma circunferência, cujo centro está no segmento $\overline{O_1O_2}$.*

Demonstração: Em qualquer plano π que contenha os pontos O_1 e O_2, existem dois pontos P e Q, tais que $d(P, O_1) = r_1$, $d(P, O_2) = r_2$, $d(Q, O_1) = r_1$ e $d(Q, O_2) = r_2$. O ponto de encontro dos segmentos $\overline{O_1O_2}$ e $\overline{PQ}$ será sempre um mesmo ponto R. Seja π_1 o plano perpendicular ao segmento $\overline{O_1O_2}$ e contendo o ponto R.

Daí, a circunferência $\mathbb{C}$, cujos pontos estejam em $\mathcal{S}_1$ (e, portanto, também em $\mathcal{S}_2$) é o conjunto dos pontos comuns a ambas as esferas. $\square$

Exercício 89: Justifique a última afirmação da demonstração acima.

Exercício 90: O que se pode dizer sobre o raio dessa circunferência?

Exercício 91: Mostre que se a reta r contiver um ponto do interior da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, então essa reta contém exatamente dois pontos em comum com a esfera.

Exercício 92: Mostre que se o plano π contiver um ponto no interior da esfera $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$, então o plano π intersecta a esfera em uma circunferência. Qual é o seu centro?

Exercício 93: Seja $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$ uma esfera e Q um ponto em seu exterior. Mostre que existe (pelo menos) uma reta tangente à esfera e contendo o ponto Q. Mostre que existe pelo menos um plano tangente à esfera e contendo o ponto Q.

Exercício 94: Seja $\mathcal{S} = \{P : d(O, P) = r\}$ uma esfera e Q um ponto em seu exterior. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos $P \in \mathcal{S}$, tais que a reta ℓ_{PQ} seja tangente à esfera. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma circunferência, cujo centro está no segmento $\overline{OQ}$.

Capítulo 4

Geometria Euclideana

4.1 Introdução

Chamamos de Geometria Euclideana a geometria descrita pelos postulados já enunciados, e mais o chamado *quinto postulado de Euclides*, cujo enunciado (modernizado) é o seguinte:

(O Quinto Postulado de Euclides) Dados $A, B \in \ell_1$, $C, D \in \ell_2$ e $B, C \in \ell_3$, tais que A e D estão do mesmo lado de ℓ_3 e $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$, então ℓ_1 e ℓ_2 se encontram num ponto P no mesmo lado que A em relação a ℓ_3.

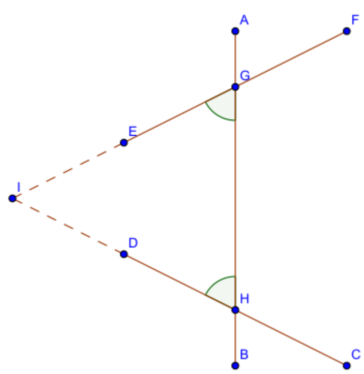

Figura 4.1: O Quinto Postulado de Euclides.

Esse postulado contrasta com os outros no sentido que seu enunciado é um tanto mais complexo que os demais. Por uma questão mais *estética* do que *lógica*, muitos geômetras consideravam que tal enunciado deveria ser derivado de outros mais simples e *de conhecimento imediato*. Mas, durante dois milênios, não se considerou a possibilidade da necessidade desse enunciado (ou de outro equivalente) como novo postulado, havendo diversas tentativas de derivá-lo a partir dos outros postulados de Euclides. Hoje sabemos que essas tentativas estariam fadadas ao fracasso. Entretanto, muitas proposições importantes foram descobertas como frutos desse esforço.

Neste capítulo vamos desenvolver a geometria euclideana, apontando um aspecto um tanto surpreendente: qualquer enunciado que somente valha nessa geometria é, de fato, equivalente ao quinto postulado. Nos próximos capítulos, mostraremos que a negação do quinto postulado, tomada como novo postulado, dá origem à chamada *geometria hiperbólica*. Por um argumento lógico simples, posemos mostrar que todo enunciado válido apenas na geometria hiperbólica é equivalente a esse novo postulado.

4.2 Preliminares

No próximo capítulo estudaremos a teoria das paralelas, em que dois tipos de quadriláteros convexos ocupam um lugar importante. Introduziremos aqui apenas os resultados necessários a este capítulo.

Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos, tais que os interiores dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ sejam disjuntos. Neste caso, dizemos que um quadrilátero $ABCD$ em um plano π é o conjunto dos pontos $\{P \in \pi : P \in \overline{AB}$, ou $P \in \overline{BC}$, ou $P \in \overline{CD}$, ou $P \in \overline{DA}\}$. Cada um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ é chamado de lado do quadrilátero. Diremos que esse quadrilátero é convexo se para todos os pontos P e Q em lados distintos de $ABCD$, o interior do segmento $\overline{PQ}$ não contém nenhum ponto de $ABCD$.

Um quadrilátero $ABCD$ é chamado de quadrilátero de Saccheri se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e oa ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são retos.

Exercício 95: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri. Mostre que se E for o ponto médio de $\overline{AB}$ e F for o ponto médio de $\overline{BC}$, então o segmento $\overline{EF}$ é perpendicular aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

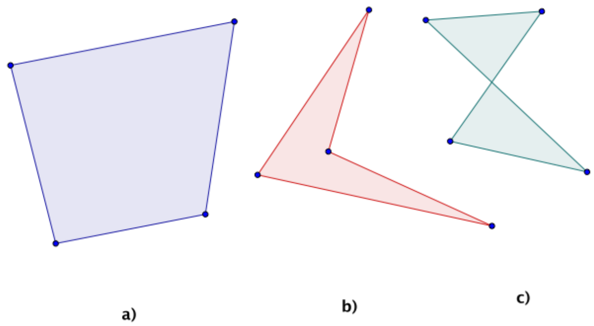

Figura 4.2: a) quadrilátero convexo; b) quadrilátero côncavo; c) não é quadrilátero.

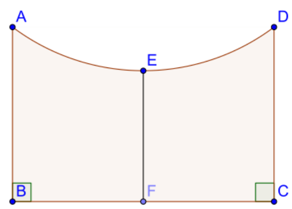

Figura 4.3: Quadrilátero de Saccheri. O lado $\overline{AD}$ foi desenhado curvo, para evitar a ilusão de que sejam retângulos.

Com a notação do exercício, o quadrilátero $EFCCD$ é chamado de quadrilátero de Lambert.

4.3 Quadriláteros e Paralelismo

Vamos provar várias formas equivalentes do chamado postulado das paralelas. É possível mostrar que toda proposição que pode ser provada com este postulado, mas não sem ele, na verdade é equivalente a este postulado. Por exemplo, toda a teoria de semelhança de triângulos depende deste postulado e, portanto, todas as proposições desta teoria serão equivalentes ao postulado.

Exercício 96: Mostre que são equivalentes

(a) (O Postulado de Euclides) Dados $A, B \in \ell_1$, $C, D \in \ell_2$ e $B, C \in \ell_3$, tais que A e D estão do mesmo lado de ℓ_3 e $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$, então ℓ_1 e ℓ_2 se encontram num ponto P no mesmo lado que A em relação a ℓ_3.

(b) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 29) Se A e D são pontos do mesmo lado de r_{BC} e r_{AB} é paralela a r_{CD}, então $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$.

(c) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 30) Para todas as linhas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, se ℓ_1 é paralela a ℓ_2 e ℓ_2 é paralela a ℓ_3, então ℓ_1 é paralela a, ou coincide com, ℓ_3.

(d) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 31: O Postulado de Playfair) Dada uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ.

(e) Existem uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, tal que existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ.

(f) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 32) Para todo $\triangle ABC$ vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$.

(g) Existe um $\triangle ABC$ tal que vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$.

(h) Todo quadrilátero de Saccheri é um **retângulo** (isto é, todos seus ângulos internos são retos).

(i) Existe um retângulo.

(j) Todo quadrilátero de Lambert é um retângulo.

(k) Para todo quadrilátero convexo $\square ABCD$, vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$.

(l) Existe um quadrilátero convexo $\square ABCD$, tal que $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$.

(m) (Teorema de Tales) Se $C \notin \overline{AB}$ mas C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, então $\angle ACB$ é reto.

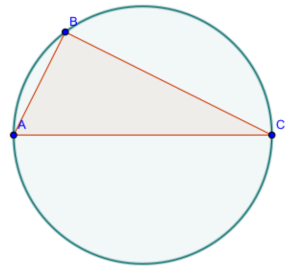

Figura 4.4: Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência.

(n) Se $\angle ACB$ é reto, então C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

(o) Existem A, $B \neq A$ e $C \notin \overline{AB}$ tais que $\angle ACB$ é reto e C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

(p) Se $C \notin \overline{AB}$ mas A, B e C estão numa circunferência de centro O e O e C estão do mesmo lado em relação a r_{AB}, então $m(\angle AOB) = 2\,m(\angle ACB)$.

Solução e/ou Sugestão: As equivalências entre (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l) e (m) e (n) já foram provadas anteriormente (onde?) e as implicações (d) $\Rightarrow$ (e), (k) $\Rightarrow$ (l), (m) $\Leftrightarrow$ (n) $\Rightarrow$ (o) são fáceis (verifique).

(a) $\Rightarrow$ (b): se A e D são pontos do mesmo lado de r_{BC} e r_{AB} é paralela a r_{CD}, por (a), $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) \geq 180$. Mas se $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) > 180$ seus suplementares satisfazem a hipótese de (a) e, portanto r_{AB} não pode ser paralela a r_{CD}. Portanto $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$.

(b) $\Rightarrow$ (c): suponhamos que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 sejam três linhas distintas, tais que ℓ_1 é paralela a ℓ_2 e ℓ_2 é paralela a ℓ_3. Sejam $B \in \ell_1$, $C \in \ell_2$ e $E \in \ell_3$ distintos e colineares (por que existem tais pontos?). Então ou $B-C-E$, ou $B-E-C$, ou $C-B-E$. Trataremos apenas o caso em que $B-C-E$, sendo os outros análogos. Sejam $A \in \ell_1$, $D \in \ell_2$ e $F \in \ell_3$ do mesmo lado em relação a r_{BC}. Por (b), $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$ e $m(\angle DCE) + m(\angle FEC) = 180$, e como $m(\angle DCB) + m(\angle DCE) = 180$, $m(\angle ABC) + m(\angle FEC) = 180$, ou seja, ℓ_1 é paralela a ℓ_3 (por quê?).

(c) $\Rightarrow$ (d): sabemos que, dada uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, existe pelo menos uma $\ell' \ni P$ paralela a ℓ, por exemplo, se $Q \in \ell$ é tal que $\overline{PQ} \perp \ell$, podemos tomar $\ell' \perp \overline{PQ}$ e $P \in \ell'$. Neste caso, se $\ell'' \ni P$ não é perpendicular

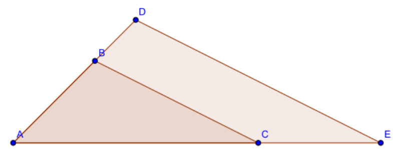

Figura 4.5: Semelhança de triângulos.

a $\overline{PQ}$, então, por (c), ℓ'' não pode ser paralela a ℓ (por quê?). Portanto ℓ' é a única paralela a ℓ e contendo P.

(d) $\Rightarrow$ (a): Sejam A e D pontos do mesmo lado de r_{BC}, e suponha que $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$. Por (d), r_{AB} e r_{CD} não podem ser paralelas (por quê?) e portanto se encontram no mesmo lado de r_{BC} em que ocorrem estes angulos alternos internos (por quê?).

(e) $\Rightarrow$ (i): sejam ℓ e $P \notin \ell$, tal que existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ e seja $Q \in \ell$ tal que $\overline{PQ} \perp \ell$. Seja $R \in \ell$, $R \neq Q$ e seja S tal que $\boxed{\text{S}}QPSR$. Então r_{PS} é paralela a ℓ e por (e), $\boxed{\text{S}}QPSR$ é um retângulo (por quê?).

(h) $\Rightarrow$ (d): parecido com o caso (e) $\Rightarrow$ (i). (Faça.)

(o) $\Rightarrow$ (g): Se O é o ponto médio de $\overline{AB}$, compare os ângulos de $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ e $\triangle ABC$.

(f) $\Rightarrow$ (p) $\Rightarrow$ (g): compare os ângulos de $\triangle ACB$ e $\triangle AOB$.

4.4 Triângulos e Paralelismo

Exercício 97: (Semelhança de triângulos) Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$ e $\angle C \equiv \angle F$ são ditos **semelhantes**, em símbolos, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Mostre que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

Solução e/ou Sugestão: Temos que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF = 1$.

Se $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$ e $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, construindo cópia congruente de $\triangle DEF$, podemos supor que $A = D$, $E \in \overrightarrow{AB}$ e $F \in \overrightarrow{AC}$, são tais que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$. Então $\square BCFE$ é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l), que é equivalente ao exercício 189 (k).

Suponha que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e que $AB/DE = r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 1$. Vamos mostrar que $AB/DE = AC/DF = BC/EF = r$. Escreva $r = m/n$, e sejam $A_0 = A$, $C_0 = A$, $A_{k+1} \in \overrightarrow{AB}$, tal que $A_{k-1} - A_k - A_{k+1}$ e $d(A_k, A_{k+1}) = (1/n)d(A, B)$, $C_{k+1} \in \overrightarrow{AC}$, tal que $\angle AA_kC_k \equiv \angle ABC$ (por que existem tais pontos?). Então $\triangle A_iA_{i+1}C_{i+1} \sim \triangle ABC$ (por quê?). Por indução em n, mostre que $A_kA/A_1A = C_kA/C_1A = k$.

Suponha que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e que $AB/DE = r \notin \mathbb{Q}$. Aproxime r por $r_n \in \mathbb{Q}$ e use a parte acima.

Exercício 98: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Existem dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes e não congruentes.

(b) Para todo par de triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

(c) Para todo par de triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$, então $\angle C \equiv \angle F$.

(d) (Homotetia) Dados $\triangle ABC$, um ponto O e $r > 0$, sejam $D \in \overrightarrow{OA}$, $E \in \overrightarrow{OB}$ e $F \in \overrightarrow{OC}$ tais que $OD = r\,OA$, $OE = r\,OB$ e $OF = r\,OC$. Então $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

Solução e/ou Sugestão: Suponha (a) e sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ triângulos semelhantes e não congruentes. Construindo cópia congruente de $\triangle DEF$, podemos supor que $A = D$, $E \in \overrightarrow{AB}$ e $F \in \overrightarrow{AC}$, são tais que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$. Então $\square BCFE$ é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l).

(c) $\Rightarrow$ (a): dado $\triangle ABC$, seja D um ponto tal que $A - D - B$, e seja

$E \in \overline{AC}$, tal que $\angle ADE \equiv \angle ABC$ (por que existe tal ponto?). Por (c), $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$.

Pelo exercício anterior, (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) são simples (faça).

Exercício 99: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Se $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$ e $\ell_3 \perp \ell_4$, então $\ell_1 \cap \ell_4$ contém pelo menos um ponto.

(b) Se $\angle AOB$ é agudo e $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$, então ℓ intersecta $\overrightarrow{OB}$.

(c) Se ℓ_1 e ℓ_2 são concorrentes e distintas e se $\ell_3 \perp \ell_1$ e $\ell_4 \perp \ell_2$, então ℓ_3 e ℓ_4 são concorrentes.

(d) Existe um ângulo $\angle AOB$ agudo, tal que, para todo $P \in \mathsf{int}\,(\angle AOB)$, existe linha $\ell \ni P$ que intersecta ambos os lados do ângulo, mas não o vértice.

(e) Para todo $\triangle ABC$, as suas mediatrizes são concorrentes (o ponto comum às três mediatrizes é o circuncentro).

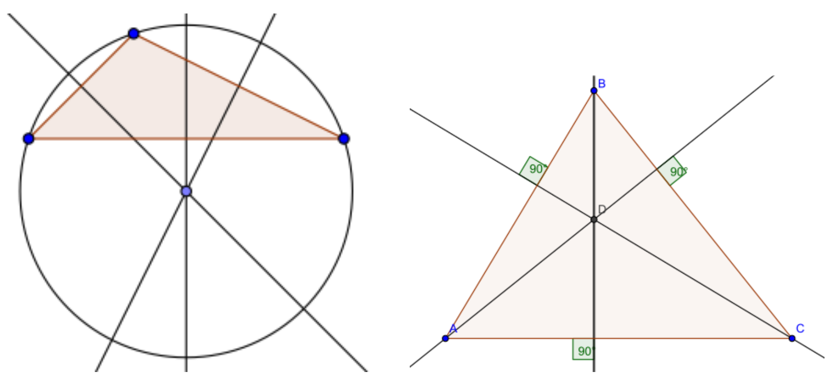

Figura 4.6: O circuncentro e ortocentro de um triângulo.

(f) Todo triangulo pode ser inscrito numa circunferência.

(g) Para todo $\triangle ABC$, as suas alturas são concorrentes (no ponto chamado de **ortocentro** de $\triangle ABC$.

Solução e/ou Sugestão: Primeiro provaremos que o Teorema de Tales (exercício 189 (m)) implica (a). Sejam $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$, $\ell_3 \perp \ell_4$, $A \in \ell_2 \cap \ell_3$, $M \in \ell_1 \cap \ell_2$, $N \in \ell_3 \cap \ell_4$, $B \in \overrightarrow{AM}$, $A - M - B$ e $AM = MB$, $C \in \overrightarrow{AN}$, $A - N - C$ e $AN = NC$. Então $\triangle ABC$ é retângulo em $\angle A$. Pelo Teorema de Tales, A está na circunferência de diâmetro $\overline{BC}$. Se $O \in \overline{BC}$ é o ponto médio, este também é o centro da tal circunferência. Considerando os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OAC$, que são isósceles, ℓ_1 e ℓ_4 encontram-se em O (por quê?).

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponha que não vale (b), ou seja, existe um ângulo $\angle AOB$ agudo e $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$, tal que ℓ não intersecta $\overrightarrow{OB}$. Podemos supor que $A \in \ell$. Sejam $C - O - A$, $CO = OA$, e D do mesmo lado que B em relação a r_{OA}. Seja $\ell' \perp r_{OA}$ e $C \in \ell'$. Então ℓ' não encontra $\overrightarrow{OD}$ (por quê?). Se $G \in \ell$ e $H \in \ell'$ são tais que $\boxed{\text{S}}\,AGHC$, então vale a hipótese do ângulo agudo (por quê?). Usando o exercício 186, podemos então encolher um ângulo $\angle A'O'B'$, tal que $m(\angle A'O'B') \leq 45$ e tal que existe $\ell'' \perp \overrightarrow{O'A'}$ que não encontra $\overrightarrow{O'B'}$. Usando o exercício 185, podemos concluir que não vale (a).

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponha que não vale (a). Sejam $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$ e $\ell_3 \perp \ell_4$, mas $\ell_1 \cap \ell_4 = \varnothing$. Podemos supor que se $A \in \ell_1 \cap \ell_2$, $B \in \ell_2 \cap \ell_3$ e $C \in \ell_3 \cap \ell_4$, então $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ (por quê?). Portanto, se $D \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ e $m(\angle ABD) = 45$, então $\ell_3 \cap \overrightarrow{BD} = \varnothing$ (por quê?), e portanto não vale (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): podemos supor que $A \in \ell_1 \cap \ell_2$ e que A não esteja nem em ℓ_3 e nem em ℓ_4. Sejam $B \in \ell_1 \cap \ell_3$ e $C \in \ell_2 \cap \ell_4$. Se $m(\angle BAC) = 90$ então (a) implica (c). Se $m(\angle BAC) > 90$ tanto ℓ_3 como ℓ_4 encontram a bissetriz de $\angle BAC$, por (b). Conclua que $\ell_3 \cap \ell_4 \neq \varnothing$. Se $m(\angle BAC) < 90$, por (b), ℓ_3 encontra $\overrightarrow{AC}$, formando um ângulo agudo. Portanto deve encontrar ℓ_4. (Faça os detalhes.)

(d) $\Rightarrow$ (b): Se não valesse (b), como acima exposto, valeria a hipótese do ângulo agudo, portanto, dado $\angle AOB$ agudo, existe ℓ tal que $\alpha = m(\angle AOB)/2$ é o ângulo de paralelismo de ℓ e O. Isto implica que se $\ell' \ni O$ e $\ell' \cap \overrightarrow{OA} \neq \varnothing$, então $\ell' \cap \overrightarrow{OB} = \varnothing$ (por quê?).

(b) $\Rightarrow$ (d), (c) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f) e (c) $\Leftrightarrow$ (g) são simples (faça).

4.5 Triângulos Retângulos e Paralelismo

Exercício 100: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) (Teorema de Pitágoras) Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto, temos $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

(b) (Lei dos Cossenos) (Dado o ângulo $\angle AOB$, se for reto, definimos $\cos(\angle AOB) = 0$, se for agudo, fazemos a construção $\triangle POR$, com $d(O, R) = 1$ e $\overline{PR} \perp \overline{OR}$ e definimos $\cos(\angle AOB) = d(O, P)$; se $\angle AOB$ for obtuso, definimos $\cos(\angle AOB) = -\cos(\angle BOC)$, sendo $\angle BOC$ o suplementar de $\angle AOB$.) A Lei dos Cossenos diz: dado $\triangle ABC$, temos $AB^2 - 2\,AB\,AC\,\cos(\angle BAC) + AC^2 = BC^2$.

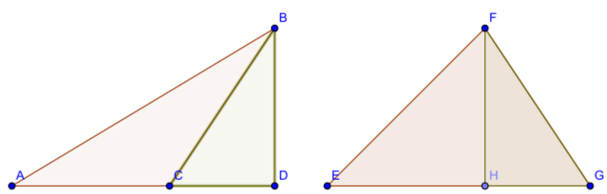

Figura 4.7: Lei dos cossenos.

(c) Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto, seja $D \in \overline{BC}$, tal que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, então $AD^2 = BD \cdot DC$.

(d) (Euclides, Prop. I-48) Dado $\triangle ABC$, se $AB^2 + AC^2 = BC^2$, então $\angle A$ é reto.

Solução e/ou Sugestão:

(b) $\Rightarrow$ (a) $\Leftrightarrow$ (c) é simples. (Faça.)

(a) implica um caso da recíproca do Teorema de Tales (exercício 189 (o)). Sejam $B - D - C$, $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$, seja A fora de $\overline{BC}$ e tal que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ e $\angle BAC$ seja reto (por que existe tal ponto?). Então $\triangle ABC$ é isósceles (prove que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$) e retângulo em $\angle A$. Por (a), $2\,AB^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4\,BD^2$. No $\triangle ADB$, que é retângulo em $\angle D$, por (a), $AB^2 = AD^2 + BD^2$, donde segue que $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$, ou seja, A está na circunferência de diâmetro $\overline{BC}$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Das equivalências do exercício 190, concluímos que se $\triangle ABC$ tem $\angle A$ reto, então $\cos(\angle B) = AB/BC$. Vamos mostrar que isto implica (b). Para isto, dado $\triangle ABC$, qualquer, com $\angle A$ agudo; seja $D \in r_{AC}$ tal que $\overline{BD} \perp r_{AC}$. Usando (a) nos triângulos convenientes, obtemos (b).

(a) $\Rightarrow$ (d): Seja D tal que $\angle CAD$ é reto e $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. Por (a), $AB^2 + AD^2 = BD^2$, ou seja $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$. Por LLL, $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ e, portanto $\angle BAC$ é reto.

(d) $\Rightarrow$ (a): Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto. Seja $d = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. Então $d < AB + AC$ e, portanto existe um triângulo $\triangle DEF$ tal que $DE = AB$, $DF = AC$ e $d = d(E, F)$. Por (d), $\angle D$ é reto. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Portanto $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Para terminar as equivalências, mostre que o exercício 191(?) (b) implica (d).

4.6 Construções com régua e compasso II

A partir de agora assumimos o postulado das paralelas.

Com isto, valem todas as proposições equivalentes a este postulado, citados na seção anterior.

Dado um segmento $\overline{OE}$ como referência de unidade de medida, dizemos que um ponto A é construtível (com régua e compasso) se o segmento $\overline{OA}$ for obtido de $\overline{OE}$ com um número finito de operações de intersecção de linhas e/ou circunferências determinadas por pontos construtíveis. (Uma circunferência é determinada por seu centro e por um ponto dela.) Um ângulo $\angle AOB$ é construtível se O é construtível e existem pontos construtíveis C e D tais que $\angle AOB = \angle COD$.

Na geometria analítica, dizemos que o ponto $A = (a, b)$ é construtível se for construtível a partir de $\overline{OE}$, sendo que $O = (0, 0)$ e $E = (1, 0)$.

Agora vamos estudar algumas construções com régua e compasso que valem na geometria euclideana (e só nela), como expostos nos *Elementos* de Euclides, nos Livros III e IV. Para isto, começamos com algumas propriedades de circunferências (dos Livros II e III).

Observação: Todas as construções no resto desta seção são com régua não graduada e compasso. Lembramos que um **polígono regular** é um polígono convexo com todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

Exercício 101: Dado o segmento $\overline{AB}$, determine (com régua e compasso) $C \in \overline{AB}$, tal que $AC^2 = AB \cdot CB$. (Para isto, construa um segmento $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, tal que $AB = 2\,AD$, e E, tal que $D - A - E$, e $\overline{DE} \equiv \overline{BD}$; seja $A - C - B$, tal que $\overline{AC} \equiv \overline{AE}$; mostre que este é o ponto procurado.)

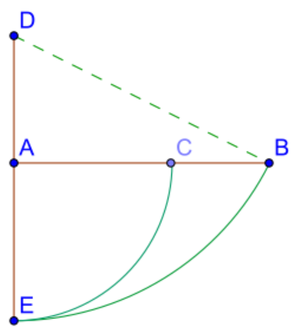

Figura 4.8: Construção do ponto C, tal que $AC^2 = AB \cdot CB$.

Exercício 102: Dados $A, B \in \mathbb{C}_{C,r}$ e $A - D - B$, mostre que $AD \cdot DB = r^2 - CD^2$. (Use o Teorema de Pitágoras nos triângulos convenientes.)

Exercício 103: Dados $A, B, Q \in \mathbb{C}_{C,r}$ e P no exterior de $\mathbb{C}_{C,r}$, tais que $A - B - P$, mostre que são equivalentes:

(a) $AP \cdot BP = PQ^2$;

(b) r_{PQ} é tangente a $\mathbb{C}_{C,r}$.

Exercício 104: Mostre que se $\square ABCD$ é convexo e $A, B, C, D \in \mathbb{C}_{P,r}$, então $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D) = 180$. (Para isto, mostre que $\angle DAC \equiv \angle DBC$, $\angle CAB \equiv \angle CDB$, etc.)

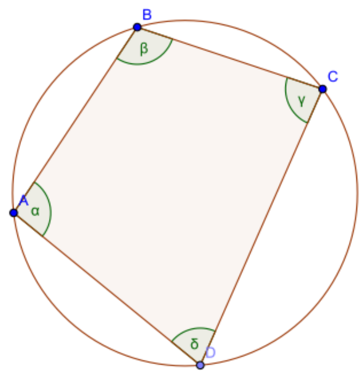

Figura 4.9: Quadrilátero inscrito: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Exercício 105: Dados $A, B, Q \in \mathbb{C}_{C,r}$ e P no exterior de $\mathbb{C}_{C,r}$, tais que $A - B - P$ e r_{PQ} é tangente a $\mathbb{C}_{C,r}$, mostre que $\angle PQB \equiv \angle BAQ$. (Para isto, considere primeiro o caso em que $\overline{AQ}$ é um diâmetro e depois use o exercício anterior, no caso genérico.)

Exercício 106: Construir um triângulo isósceles cujos ângulos da base medem o dobro do terceiro ângulo. Para isto, dado o segmento $\overline{AB}$, ache C tal que $A - C - B$ e $AC^2 = AB \cdot CB$; seja $D \in \mathbb{C}_{A,d(A,B)}$, tal que $d(A, C) = d(B, D)$; mostre que o triângulo procurado é $\triangle ABD$. (Para esta última afirmação, seja $\mathbb{C}_{O,s}$ a circunferência circunscrita ao $\triangle ABQ$; mostre que $\angle PQB \equiv \angle BAQ$, $\angle APQ \equiv \angle AQP$, $\angle PBQ \equiv \angle BPQ$ e, portanto $\angle AQB \equiv \angle BAQ$, etc.)

Exercício 107: Dada uma circunferência $\mathbb{C}_{P,r}$, mostre que um pentágono regular inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$ (todos os vértices na circunferência) é construtível. (Construa primeiro um triângulo isósceles com ângulos da base medindo 72, $\triangle RST$, inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$; mostre que a base deste triângulo é o lado do pentágono procurado.)

Exercício 108: Dada uma circunferência $\mathbb{C}_{P,r}$, mostre que um pentágono regular circunscrito a $\mathbb{C}_{P,r}$ (todos os lados são tangentes a $\mathbb{C}_{P,r}$).

Exercício 109: Mostre que um hexágono regular de lado construtível dado é construtível.

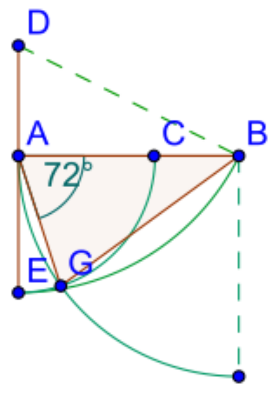

Figura 4.10: Construção de triângulo isósceles, culo ângulo da base mede 72°.

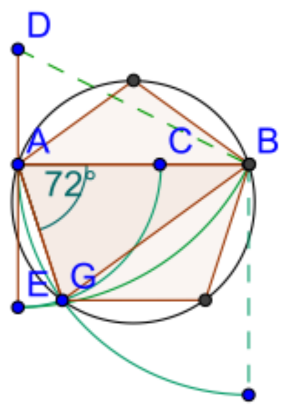

Figura 4.11: Construção de pentágono regular inscrito em uma circunferência.

Exercício 110: Mostre que um polígono regular de 15 lados inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$ é construtível. (Inscrever $\triangle ABC$ equilátero e um pentágono regular com um dos vértices A em comum, etc.)

Exercício 111: Mostre que se um polígono regular de n lados é construtível, então um polígono regular de $2n$ lados é construtível.

Exercício 112: Extraindo uma raiz quadrada! Dado um segmento $\overline{OU}$ como referência de unidade de medida, e um segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{AB} = \lambda\,\overline{OU}$, para construir um segmento $\overline{PQ}$, tal que $\overline{PQ} = \sqrt{\lambda}\,\overline{OU}$, inscreva em uma circunferência um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{AC}$ medindo $\lambda + 1$ e tal que tenha altura sobre o ponto C.

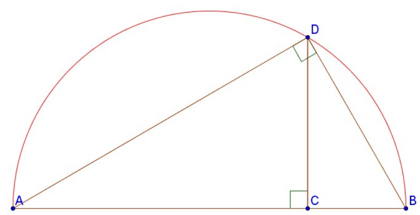

Figura 4.12: Extraindo a raiz quadrada: $CD^2 = AC \cdot BC$.

Exercício 113: O círculo de Carlyle. Como resolver uma equação de segundo grau, com régua e compasso. Queremos resover a equação $x^2 - s\,x + p = 0$, conhecendo segmentos que meçam $|s|$ e $|p|$. Para facilitar a descrição, vamos fazê-la em $\mathbb{R}^2$ (na geometria analítica). Sejam A o ponto $(0,1)$ e $B = (s,p)$. A intersecção do círculo de diâmetro$\overline{AB}$ (chamado de círculo de Carlyle da equação) com o eixo x pode conter no máximo dois pontos $H_1 = (x_1, 0)$ e $H_2 = (x_2, 0)$, com $x_1 \leq x_2$. Mostre que os números x_1 e x_2 são as raízes da equação. Intterprete a condição do discriminante $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$ para a existência de raízes (reais) em termo da distância do centro do círculo de Carlyle ao eixo x.

Exercício 114: (K. F. Gauss, Séc. XIX) Mostre que um polígono regular de 17 lados é construtível.

Para tal construção devemos obter um ângulo θ medindo $(360/17)^\circ$. Aos 19 anos de idade, o jovem Carl F. Gauss obteve a seguinte fórmula:

$$16\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

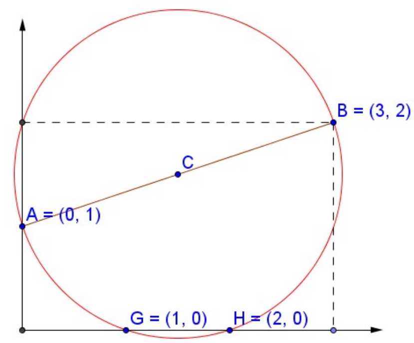

Figura 4.13: Resolvendo a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ com o método do círculo de Carlyle.

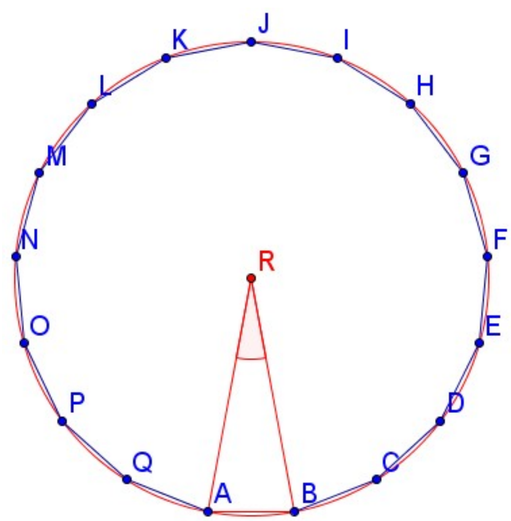

Figura 4.14: O polígono regular de 17 lados.