ALBERT FISHER

Axiomas para os numeros naturais $\mathbb{N}$. (1)

Escrevemos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, então é equivalente dizer: "n é um numero natural" ou "$n \in \mathbb{N}$".

Aqui são axiomas para $\mathbb{N}$:

(0) Existe um conjunto $\mathbb{N}$, com operações $+, \cdot$; satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $\exists !\ 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 + n = n$.

(existe uma única elemento do $\mathbb{N}$, chamado 0, tal que para todos os n, $0 + n = n$).

"existencia da identidade aditiva"

(2) $n + m = m + n$ (a lei comutativa)

(3) $(k+m)+n = k+(m+n)$ (a lei associativa)

(4) $\exists!\ 1$ tal que $1 \cdot n = n$
(identidade muliplicativa)

(5) $n \cdot m = m \cdot n$

(6) $(k \cdot n) \cdot m = k(m \cdot n)$

as leis comutativas e associativas para $\cdot$

(7) $k(n+m) = kn + km$

a lei distributiva

OBS:
Axiomas de um anel: As axiomas (0)-(7) definam uma anel, mais geral do que $\mathbb{N}$. Para especificar $\mathbb{N}$ exatamente, adicionamos a ideia do sucessor: O sucessor $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função; a idea é que $S(n) = n+1$, Daí temos estes axiomas:

(8) $S(0) = 1$

(9) Se $S(n) = S(m)$ então $n = m$;

(10) Não existe n com $n^{+} = 0$;

(II) Se $A \subseteq \mathbb{N}$ tem a propriedade que $1 \in A$ e se $n \in A$ então $n^+ \in A$, daí $A = \mathbb{N}$
(o princípio de indução.)

Teorema: Um conjunto satisfazendo Axiomas (I)-(II) existe e é única até isomorfismo (de aneis.)

Para provar existencia, podemos utilizar a definição do $\mathbb{N}$ do von Neumann, baseado inteiramente na Teoria dos Conjuntos.

Para definir $\mathbb{Q}$, pegamos

$$\mathbb{Q} = \{(p,q) : p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}/\sim$$

onde $/\sim$ indica
"modulo a relação de equivalência"
onde $(p,q) \sim (kp, kq)$.

Podemos provar que $+, \cdot$ são definidos no $\mathbb{Q}$, que é um anel único.

Para definir $\mathbb{R}$, podemos (simplificando um pouco) definir $x \in \mathbb{R}$ através da expansão decimal, para $x \in [0,1]$ com

$$x = .x_0 x_1 \ldots \qquad x_i \in \{0,..,9\}.$$

(simplificando pois temos que colocar por exemplo que $1.00\ldots = .999\ldots$).

Definindo $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$:

Utilizamos a definição acima do $\mathbb{N}$ para então definir

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ (os inteiros)

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq \}$ (os racionais)

e $\mathbb{R}$(os numeros reais) na seguinte maneira:

Sabemos que $2 = \{0, 1\}$ (defn. do von N.)

e que $\mathbb{N}^2 = \{(x_0, x_1) : x_i \in \mathbb{N}\}$

(definição de pares ordenados e de espaço produto), e agora escrevemos:

$$\left.\begin{array}{l} (0, n) \sim n \geq 0 \\ (1, n) \sim (-n-1) < 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{ai} \\ \mathbb{Z} = \mathbb{N}^2 \end{array}$$

e podemos definir $+$, $\cdot$ e provar todos os propriedades de um anel.

<u>Def</u>: Se F é um anel (com $+, \cdot$) tal que também $\forall x \neq 0$ temos uma <u>inversa</u> <u>multiplicativa</u> então F é um <u>campo</u> ("field" em inglês).

<u>Teorema</u>: $\exists !$ campo <u>ordenado</u> e <u>completo</u> (único até isomorfismo.) chamamos isto $\mathbb{R}$ (os numeros reais).

<u>Def</u>. <u>ordenado</u> quer dizer:

1) $\forall x, y \in \mathbb{F}$, um (somente) vale: $x < y$, $x = y$, $y < x$

(isto se chama <u>tricotomia</u>)

2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

3) $(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac < bc$.

<u>Completo</u> quer dizer "não tem buracos".

Mais precisamente, se
$x_i \in \mathbb{R}$ e' crescente e limitado,
$\exists x : x_i \to x$.

(existe varias maneiras equivalente
a dizer isto.)

Prop. Existe numeros irracionais.

Prova: Mostramos que $\sqrt{2}$ e' irracional, isto e', $\sqrt{2}$ e' um numero real tal que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Prova por contradição:
Caso contrario ($\sqrt{2}$ e' racional)
$\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ tal que
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Podemos assumir que $\frac{p}{q}$ está reduzida.

(isto é, p, q não tem fator em comum).

Aí prosseguimos:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ é par } (p^2 = 2k)$$

$$\Rightarrow p \text{ é par}$$

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par}$$

$\Rightarrow q, p$ tem fator 2 em comum $*$

//

($*$ contradição
// final da prova)

Exercíso:

Prova que $x \in \mathbb{R}$ é racional (para $x \in [0,1]$) sse a expansão decimal se repete depois um certain momento.

Por exemplo, $\frac{3}{7} = .\overline{428571}$ pois

$$
\begin{array}{r|l}
 & .428571\ldots \\
7 & 3.0 \\
 & 28 \\
 & \overline{20} \\
 & 14 \\
 & \overline{60} \\
 & 56 \\
 & \overline{40} \\
 & 35 \\
 & \overline{50} \\
 & 49 \\
 & \overline{10} \\
 & 7 \\
 & \overline{30} \ldots
\end{array}
$$

Teorema: $[0, 1]$ não é **denumerável** (não existe uma bijeção (= correspondência 1-1) com $\mathbb{N}$).

Prova: Argumento da **Cantor** do **diagonal** (feito na aula)

Teorema: $\mathbb{Q}$ é denumerável.
(feito na aula).