A definição do von Neumann para os inteiros.

John von Neumann em 1923 introduziu a seguinte maravilhosa definição dos números naturais (os inteiros não-negativos) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, utilizando apenas conjuntos:

$0 \equiv \{\} = \emptyset$, o conjunto vazio;

$1 \equiv \{0\} = \{\emptyset\}$

$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = \{0, 1, 2\}$

então indutivamente $n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$

Observe-se que $\# n = n$ (o número de elementos no conjunto n é n mesmo).

Notamos que: $n \leq m \iff n \subseteq m$!

(que é útil!)

Para (muito) mais informações, veja Halmos, *Naive Set Theory*,

<u>Def</u>: Dado conjuntos X, Y então $Y^X = \{f: X \to Y\}$.

<u>exemplo</u>: Pela def. do von Neumann, $2 = \{0, 1\}$, Daí $X^2 =$

$$\{f : \{0,1\} \to X\} = \{(f(0), f(1))\}$$

$$= \{(a,b) : a, b \in X\}$$

Por exemplo, $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ os <u>pares</u> <u>ordenados</u>.

<u>OBS</u>: um <u>par</u> <u>ordenado</u> é (a,b); um <u>par</u> <u>não-ordenado</u> é $\{a,b\}$.

nota que $\{a,b\} = \{b,a\}$ embora $(a,b) = (c,d) \iff (a=c \text{ e } b=d)$.

(a ordem não importa para um

conjunto A, apenas o "conteudo": quais elementos A tem.)

Um triplo ordenado é (a, b, c)

(por exemplo) ou (x_0, x_1, x_2) ou (x_1, x_2, x_3).)

Um n-tuplo ordenado é

$(x_0, \ldots, x_{n-1})$ ou $(x_1, \ldots, x_n)$

por exemplo.

Isto também é uma sequencia finita.

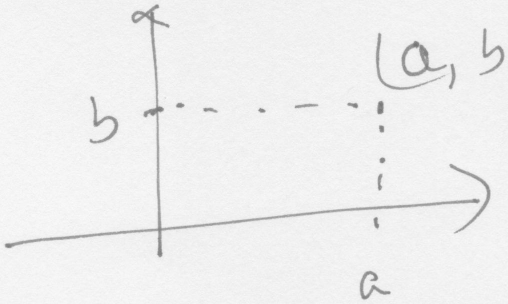
Uma sequencia infinita é

$x = (x_0, x_1, \ldots)$ (por exemplo, de numeros reais, $x_i \in \mathbb{R}$). Isto também é um tuplo infinito.

Observe-se que $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pois x é uma função de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$: temos uma tabela de valores da função x:

$k \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
0	$x_0 = x(0)$
1	$x_1 = x(1)$
2	x_2 $\vdots$
3	x_3

<u>Para visualizar</u> $\mathbb{R}^2$, colocamos 2 eixos perpendicularmente:

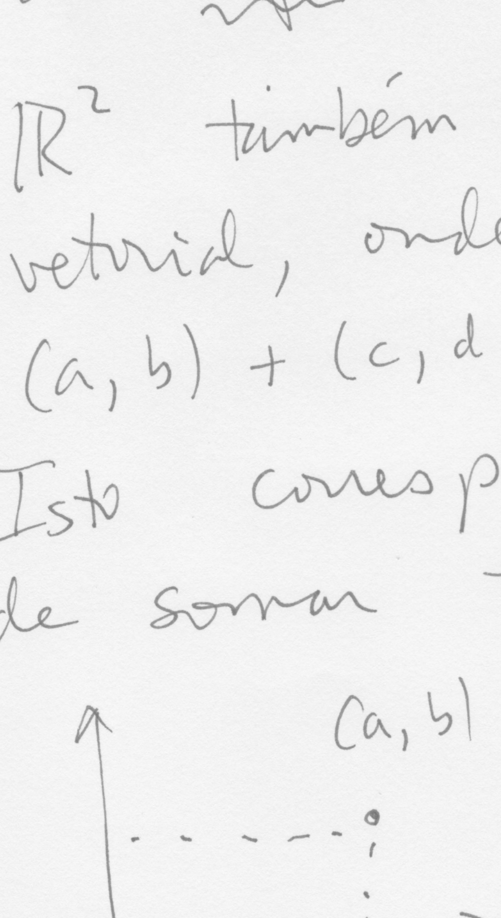


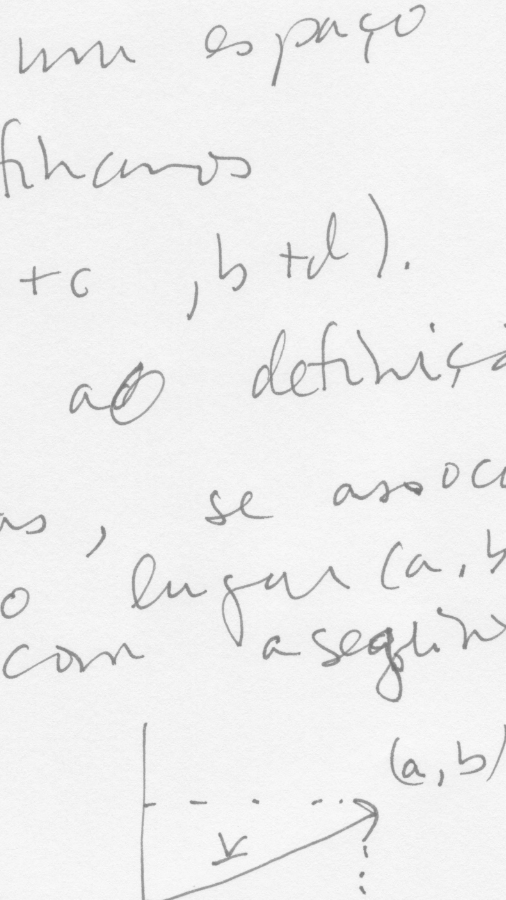
então (a, b) corresponde a um lugar (um ponto) no plano.

$\mathbb{R}^2$ também é um espaço vetorial, onde definimos

$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$.

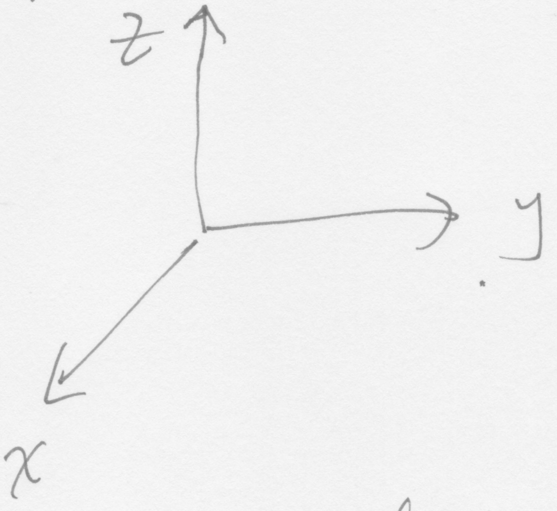
Isto corresponde ao definição de somar flechas, se associamos o lugar (a, b) com a seguinte flecha: $\underline{v}$

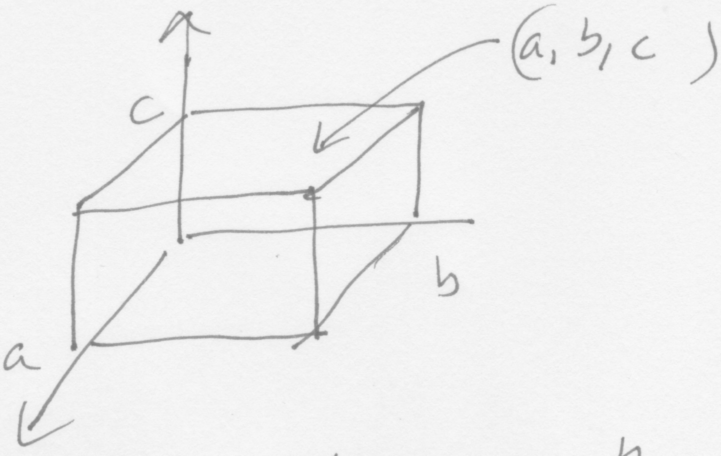




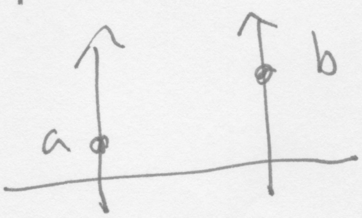
ESPAÇOS DE FUNÇÕES.

Para visualizar $\mathbb{R}^3$, colocamos um terceiro eixo $\perp$ aos outros:

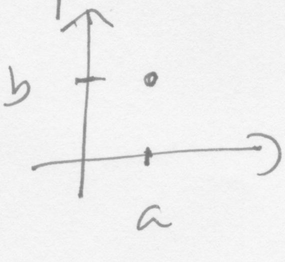




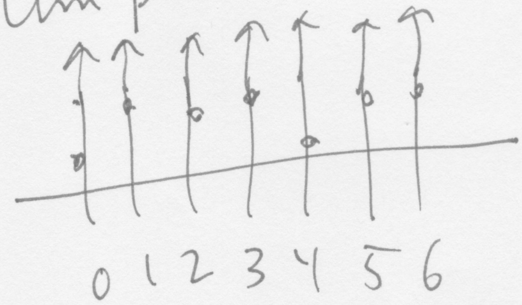
Para visualizar $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, ... $\mathbb{R}^n$ ou mesmo $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, colocamos os eixos paralelos pois não tem espaço de por perpendicular!



$\leftarrow$ um ponto no $\mathbb{R}^2 \rightarrow$



um ponto no $\mathbb{R}^7$:

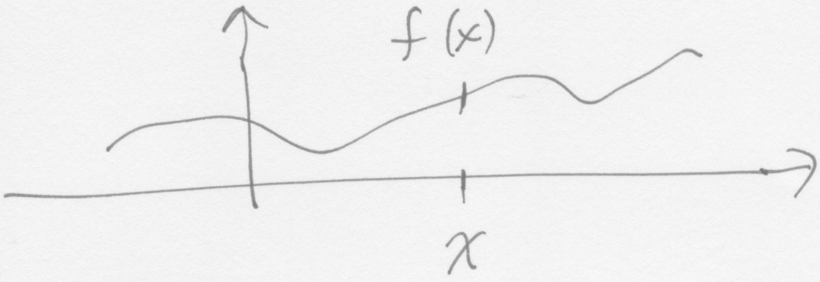


uma sequência infinita:

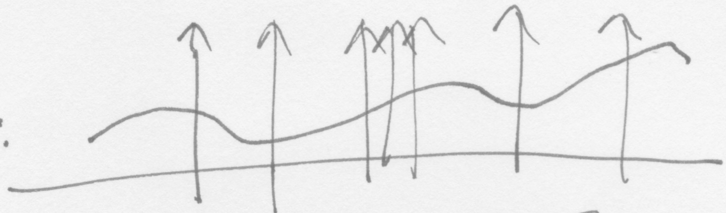
uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Para visualizar

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, isto é, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:



ou:



← uma eixo p. cada x!

Obs: $f+g$ está definido assim:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, e para

$x = (x_0, \ldots, x_n)$ $\quad y = (y_0, \ldots, y_n)$

definamos $x + y$ por:

$(x+y)(k) = x_k + y_k$, isto é,

$(x_0, \ldots, x_n) + (y_0, \ldots, y_n) =$

$(x_0 + y_0, \ldots, x_n + y_n)$.

(A mesma definição!!).

De mostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um espaço vetorial, com sta def. de $+$, $\cdot$ a verificação é igual: é coordenado - por coordenado.

Obs: o valor $f(x)$ pode ser considerado o x-coordenado do f !!

Def: Dado V, W espaços vetoriais, $f : V \to W$ é uma transformação linear sse $f(a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2) = af(\underline{v}_1) + bf(\underline{v}_2)$.

(Isto quer dizer, vale para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in V$). Tal f é um iso-morfismo sse f tem uma inverso $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f} : W \to V$ é linear com $\tilde{f} \circ f$, $f \circ \tilde{f}$ = identidade. (no V, W respetivamente).

<u>exemplo</u> com espaços de

<u>funções</u>: $\mathcal{C} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ contínua} \}$

$$\mathcal{C}^1 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f' \in \mathcal{C} \}$$

$$\mathcal{C}^2 : \quad f'' = f^{(2)} \in \mathcal{C}$$

(a segunda derivada existe, e é contínua).

<u>Prop</u>: $D : \mathcal{C}^{k+1} \to \mathcal{C}^k$, a <u>aplicação derivada</u>, definido por $(Df)(x) = f'(x)$, é linear.

<u>Prova</u>: $(af + bg)' = af' + bg'$, como provado no Calculo. //

<u>Prop</u>: $\int$, o integral, é linear:

$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{é linear de } \mathcal{C} \to \mathbb{R};$$

$$f(t) \mapsto \int_a^t f(x)\,dx \quad \text{e linear de } \mathcal{C} \to \mathcal{C}^1.$$

(<u>Prova</u>: o Calculo.) //

exemplo: o espaço P de polinomios: complexo (9)

Um polinomio de grau $n+1$ n é p tal que

(Def 1) $$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot + a_n z^n$$

onde $a_0, a_1, .., a_n \in \mathbb{C}$, isto é;

$(a_0, .., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$;

(Def 2) $$p(z) = c\,(z - w_0)(z - w_1) \cdots (z - w_n)$$

onde $c, w_k \in \mathbb{C}$.

Teorema: as definições additivas e multiplicativas, (1) e (2), são equivalentes.

Prova: Observe-se que, partindo da def. (2), o produto é de fato da forma (1). Para provar o converso, partindo de (1), a teorema Fundamental de Algebra fale exatamente isto (que cada polinómio de grau

$(n+1)$, isto é, da forma (1), tem uma fatorização em fatores lineares (de grau 1), da forma (2). Isto é única (a fatorização) até ordem; em outras palavares, os numeros $\{c; w_0, \ldots, w_n\}$ são unicamente definidas. //

(a prova não é facil, para $(1) \Rightarrow (2)$).

Prop: Escrevendo P_k para a coleção de polinomios de grau $\leq k$, então P_k é um espaço vetorial, e

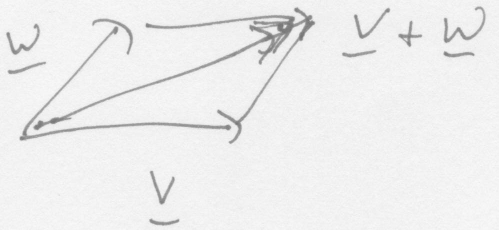
$$D: P_{k+1} \to P_k \quad e \quad D: P_0 \to \{0\}$$

(OBS: P_0 = os polinomios de grau 0, isto é, as funções constantes

$p(x) = 0 \quad \forall x$.

<u>Def</u>: Dado um espaço vetorial V, uma <u>combinação</u> <u>linear</u> dos vetores $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ é um somatório

$$\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\underline{v}_i .$$



Todos os combinaçãos lineares de 2 vetores $\underline{v}, \underline{w}$ não-colineares formam um <u>plano</u> $\{t\underline{v} + s\underline{w} : t, s \in K\}$

(onde K é o nosso corpo.)

(Quando $K = \mathbb{R}$ é um plano no sentido usual, <u>gerado</u> pelas flechas $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$). (Este plano passe por $\underline{0}$).

<u>Def</u>: Dado vetores $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ o <u>espaço</u> <u>gerado</u> por $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ é a colecação de todos os combinaçãos

lineares destes vetores:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v}_i \; : \; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(Observe-se que é de fato um espaço vetorial).

<u>Segunda</u> definição: O espaço gerado por $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ é o <u>menor</u> <u>sub-espaço</u> que contem todos estes $\underline{v}_i$.

<u>Prop</u>. Os definições são equivalentes.

<u>Def</u>. $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ são <u>linearmente</u> <u>independentes</u> (L.I.) sse

$$\sum a_i \underline{v}_i = \underline{0} \Rightarrow a_i = 0 \;\; \forall i.$$

<u>Def</u> se não, eles são L.D. (<u>linearmente</u> <u>dependentes</u>).

Definição: Dado um espaço vetorial V, uma base de V é uma sequencia $(\underline{v}_1, .., \underline{v}_n)$ tal que

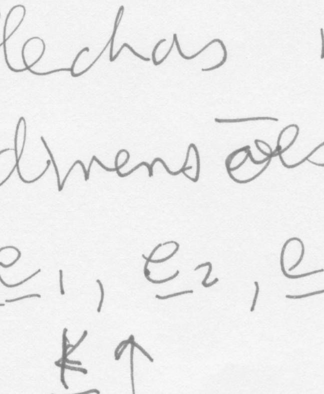
(1) estes vetores geram V

(2) eles são L.I.

exemplo (I) uma base para os polinomios P_n é $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

(II) ~~as~~ base padrão do $\mathbb{R}^3$ é:
$((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$.

a base padrão do espaço de flechas no espaço de 3 dimensões são estes vetores
$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$



(correspondendo ao base padrão do $\mathbb{R}^3$.)

Observe-se que a aplicação

de $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^{n+1}$

com $\Phi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$

leve a base padrão do $\mathbb{P}_n$ ao

base padrão do $\mathbb{R}^n$.

$$\Phi(x^n) = (\underset{\cdot}{0} \ldots 0 \underset{n}{1} 0 \ldots 0)$$

$\mathbb{P} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{P}_n$ é o espaço vetorial

de todos os polinomios.

Uma base para $\mathbb{P}$ é <u>infinito</u>:

$\{1, x, x^2, \ldots\}$

(Mas cada elemento de $\mathbb{P}$ tem uma

grau (finito).)