Lema para Mudança de Variaveis na Área da Superficie.

Dado uma matriz $A = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow \\ \underline{v} & \underline{w} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ (3×2)

e uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ (2×2),

observamos que para o produto

$AM = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow \\ \tilde{\underline{v}} & \tilde{\underline{w}} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \tilde{A}$ temos $\tilde{\underline{v}} = a\underline{v} + b\underline{w}$

$\tilde{\underline{w}} = c\underline{v} + d\underline{w}$:

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{w}_1 \\ \tilde{v}_2 & \tilde{w}_2 \\ \tilde{v}_3 & \tilde{w}_3 \end{bmatrix}$$

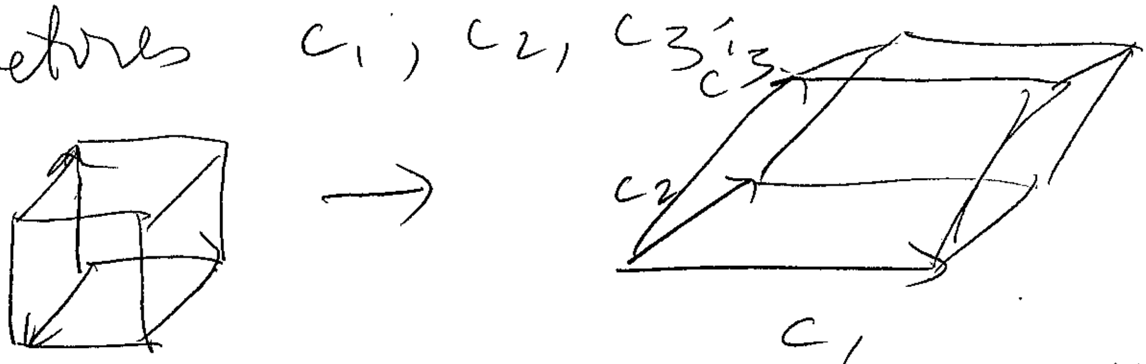
<u>Lema</u>: $\|\tilde{v} \wedge \tilde{w}\| = |\det M| \; \|\underline{v} \wedge \underline{w}\|$.

<u>OBS</u>; pegando a transposta,

$M^t A^t = \tilde{A}^t$; basta provar ali.

Lembramos que uma matriz A com colunas c_1, c_2, c_3 dá uma mudança de volume igual a $\det A$.

Também, a imagem do cubo $(1 \times 1 \times 1)$ é o paralelepípedo gerado pelos vetores c_1, c_2, c_3;



Lembramos também o significado geométrico do $\underline{v} \wedge \underline{w}$. Dado

$\underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ então

$$\underline{z} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \xrightarrow{\quad z \quad} \\ \xrightarrow{\quad v \quad} \\ \xrightarrow{\quad w \quad} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= z_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}$$

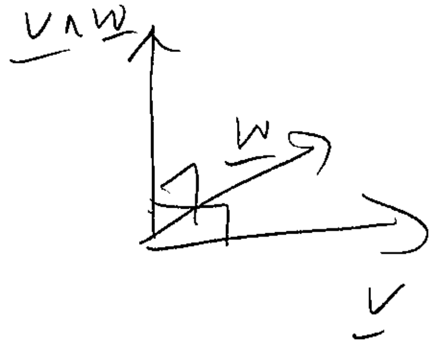
$$= (z_1, z_2, z_3) \cdot \left(i \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \right).$$

Dado este fato, pegando primeiro $\underline{z} = \underline{v}$, temos

$$\underline{v} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = \begin{vmatrix} \longrightarrow v \longrightarrow \\ \longrightarrow v \longrightarrow \\ \longrightarrow w \longrightarrow \end{vmatrix} = 0 \text{, também}$$

$$\underline{w} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = 0$$

1) Daí, $\underline{v} \wedge \underline{w}$ é $\perp$ ao plano $\underline{v}, \underline{w}$;



Então vol do paralelepípedo

$$= \begin{vmatrix} v\wedge w & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \longrightarrow v\wedge w \longrightarrow \\ \longrightarrow v \longrightarrow \\ \longrightarrow w \longrightarrow \end{vmatrix} = \|v \wedge w\| \cdot \text{área do } ▱ \text{ (a base)}$$

$$= (v \wedge w) \cdot (v \wedge w) = \|v \wedge w\|^2$$

Daí,

(2) $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| =$ área do paralelogramo.

Vamos agora considerar

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xrightarrow{\quad v \quad} \\ \xrightarrow{\quad w \quad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xrightarrow{\quad \tilde{v} \quad} \\ \xrightarrow{\quad \tilde{w} \quad} \end{bmatrix}$$

$\shortparallel$ M $\qquad$ (2×3)

então

$$\underline{\tilde{v}} = a\underline{v} + b\underline{w}\ , \quad \underline{\tilde{w}} = c\underline{v} + d\underline{w}$$

Nota-se que $\underline{v} \wedge \underline{w} \perp \underline{\tilde{v}}, \underline{\tilde{w}}$ pois estes estão no plano $\underline{v}, \underline{w}$.

Agora,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_3 \\ \tilde{w}_1 & \tilde{w}_2 & \tilde{w}_3 \end{bmatrix}$$

e $\det\left(\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}$

Pegando $\underline{z} = \underline{v} \wedge \underline{w}$, temos $\leftarrow$ volume!

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xrightarrow{v \wedge w} \\ \xrightarrow{\quad v \quad} \\ \xrightarrow{\quad w \quad} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xrightarrow{v \wedge w} \\ \xrightarrow{\quad \tilde{v} \quad} \\ \xrightarrow{\quad \tilde{w} \quad} \end{vmatrix} = \|\underline{v} \wedge \underline{w}\| \text{ área } (\tilde{v}, \tilde{w})$$

$$= \|v \wedge w\| \, \|\tilde{v} \wedge \tilde{w}\|$$

$\shortparallel$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \|v \wedge w\|^2$$

Dai,

$$\|\tilde{v} \wedge \tilde{w}\| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \|v \wedge w\|.$$

Área de superfície é bem-definido

Dado uma superfície parametrizada $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definamos a área da imagem $S = \sigma(A)$ a ser:

$$\iint_{\sigma} dS = \iint_{A} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv.$$

Teorema: Isto é bem-definido: dado uma outra parametrização $\varphi : B \to \mathbb{R}^3$ com $H : A \to B$ classe C^2 e invertível, e com Imagem$(\varphi) = S$, temos $\iint_{\sigma} dS = \iint_{\varphi} dS$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^3 & \\
A_{(s,t)} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "H"] & & B_{(u,v)} \arrow[ul, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

$\varphi = \sigma \circ H$

Prova: Definamos

$$F(u,v) = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \quad \text{e}$$

$$G(s,t) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|.$$ Daí, área(S') =

$$\iint_{\sigma} dS' = \iint_{B} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\,dv = \iint_{B} F(u,v)\, du\,dv$$

$$= \iint_{A} F \circ H \,|\det DH|\, ds\,dt$$ pelo teorema de mudança de variáveis para integral dupla:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} & \\ A \arrow[ur, "F \circ H"] \arrow[rr, "H"] & & B \arrow[ul, "F"'] \end{tikzcd}$$

Para provar o teorema basta verificar

que $F \circ H\, |\det H| = G$.

(3)

Dado uma matriz $A = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow \\ v & w \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$ (3×2),

definamos $I(A) = \|\underline{v} \wedge \underline{w}\|$. No Lema

provamos que, dado M (2×2), então

$$I(A\,M) = I(A)\,|\det M|.$$

Agora, $F(H(s,t))\,|\det DH(s,t)|$

$$= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \circ H(s,t)\ |\det DH(s,t)|$$

$$= I\big(D\sigma(H(s,t))\big)\ |\det DH(s,t)|$$

$$= I\big(D\sigma(H(s,t))\ DH(s,t)\big)$$

$$= I\big(D(\sigma \circ H)(s,t)\big) = I\big(D\varphi(s,t)\big)$$

$= G(s,t)$. // (terminando a prova!!)