*Exercícios 3.1*

1. Seja $A$ o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$, sendo $(x, y)$ igual a

   *a*) $x + 2y$
   *b*) $x - y$

   *c*) $\sqrt{x + y}$
   *d*) $\dfrac{1}{x + y}$
   *e*) $1$
   *f*) $x \cos xy$
   *g*) $y \cos xy$
   *h*) $\dfrac{1}{(x + y)^2}$
   *i*) $y\, e^{xy}$
   *j*) $xy^2$
   *l*) $x \operatorname{sen} \pi y$
   *m*) $\dfrac{1}{1 + x^2 + 2xy + y^2}$

2. Sejam $f(x)$ e $g(y)$ duas funções contínuas, respectivamente, nos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$. Prove que

$$\iint_A f(x) g(y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right)$$

   onde $A$ é o retângulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

3. Utilizando o Exercício 2, calcule

   *a*) $\iint_A xy^2\, dx\, dy$, onde $A$ é o retângulo $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 3$.
   *b*) $\iint_A x \cos 2y\, dx\, dy$, onde $A$ é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
   c) $\iint_A x \ln y\, dx\, dy$, onde $A$ é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.
   *d*) $\iint_A xy\, e^{x^2 - y^2}\, dx\, dy$, onde $A$ é o retângulo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 3$.

5. Calcule $\iint_B y\,dx\,dy$ onde $B$ é o conjunto dado.

*a*) $B$ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.
*b*) $= B\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x + 2\}$.
*c*) $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x^2 + 4y^2 \leq 1$.
*d*) $B$ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(2, 1)$.
*e*) $B$ é a região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.
*f*) $B$ é o paralelogramo de vértices $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
*g*) $B$ é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$.
*h*) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^5 - x \leq y \leq 0\}$.

6. Calcule $\iint_B f(x, y)\,dx\,dy$ sendo dados:

*a*) $f(x, y) = x \cos y$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 \leq y \leq \pi\}$.
*b*) $f(x, y) = xy$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x \text{ e } x \geq 0\}$.
*c*) $f(x, y) = x$ e $B$ o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 0)$.
*d*) $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2}$ e $B$ o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
*e*) $f(x, y) = x + y$ e $B$ o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 0)$.
*f*) $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln y}$ e $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leqslant y \leqslant 3, 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{y}\right\}$.
*g*) $f(x, y) = xy \cos x^2$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.
*h*) $f(x, y) = (\cos 2y)\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 x}$ e $B$ o retângulo de vértices $(0, 0)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
*i*) $f(x, y) = x + y$ e $B$ a região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = e^x$, com $0 \leq x \leq 1$.

7. Inverta a ordem de integração.

a) $\int_0^1 \left[ \int_0^x f(x, y)\, dy \right] dx.$

b) $\int_0^1 \left[ \int_{x^2}^x f(x, y)\, dy \right] dx.$

c) $\int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx \right] dy.$

d) $\int_1^e \left[ \int_{\ln x}^x f(x, y)\, dy \right] dx.$

e) $\int_0^1 \left[ \int_y^{y+3} f(x, y)\, dx \right] dy.$

f) $\int_{-1}^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy \right] dx$

g) $\int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy \right] dx.$

h) $\int_0^1 \left[ \int_{y-1}^{2-2y} f(x, y)\, dx \right] dy.$

i) $\int_0^1 \left[ \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dy \right] dx.$

j) $\int_0^1 \left[ \int_{e^y - 1}^{e^y} f(x, y)\, dx \right] dy.$

l) $\int_0^1 \left[ \int_{2x}^{x+1} f(x, y)\, dy \right] dx.$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \int_0^{\operatorname{tg} x} f(x, y)\, dy \right] dx.$

9. Utilizando integral dupla, calcule a área do conjunto $B$ dado.

*a*) $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $\ln x \leq y \leq 1 + \ln x$, $y \geq 0$ e $x \leq e$.

*b*) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}$.

*c*) $B$ é determinado pelas desigualdades $xy \leq 2$, $x \leq y \leq x + 1$ e $x \geq 0$.

*d*) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \dfrac{4}{x} \leqslant 3y \leqslant -3x^2 + 7x\right\}$.

*e*) $B$ é limitado pelas curvas $y = x^2 - x$ e $x = y^2 - y$.

*Exercícios 4.2*

1. Calcule

*a)* $\iint_B (x^2 + 2y)\, dx\, dy$ onde $B$ é o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

*b)* $\iint_B (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

*c)* $\iint_B x^2\, dx\, dy$ onde $B$ é o conjunto $4x^2 + y^2 \leq 1$.

*d)* $\iint_B \operatorname{sen}(4x^2 + y^2)\, dx\, dy$ onde $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $4x^2 + y^2 \leq 1$ e $y \geq 0$.

*e)* $\iint_B e^{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ onde $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $-x \leq y \leq x$, $x \geq 0$.

*f)* $\iint_B \dfrac{\sqrt[3]{y - x}}{1 + y + x}\, dx\, dy$ onde $B$ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

*g)* $\iint_B x\, dx\, dy$ onde $B$ é o conjunto, no plano $xy$, limitado pela cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$.

*h)* $\iint_B \dfrac{e^{y - x^2}}{y - x^2}\, dx\, dy$ onde $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $1 + x^2 \leq y \leq 2 + x^2$, $y \geq x + x^2$ e $x \geq 0$.

*i)* $\iint_B x\, dx\, dy$ onde $B$ é o círculo $x^2 + y^2 - x \leq 0$.

*j)* $\iint_B \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ onde $B$ é o quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

$\rho = \cos 2\theta, -\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

h) $\iint_B xy \, dx \, dy$ onde $B$ é o círculo $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$, $x \geq 0$.

3. Calcule $\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2} \, dx \, dy$ onde $B$ é o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Calcule a área da região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ e $b > 0$).

*Exercícios 4.3*

1. Calcule o centro de massa.

   *a)* $\delta(x, y) = y$ e $B$ o quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
   *b)* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ e a densidade é proporcional à distância do ponto ao eixo $x$.
   *c)* $B$ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ e a densidade é proporcional à distância do ponto à origem.
   *d)* $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x^3 \leq y \leq x$ e a densidade é constante e igual a 1.
   *e)* $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x \leq y \leq x + 1$, $0 \leq x \leq 1$, e a densidade é o produto das coordenadas do ponto.
   *f)* $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, e a densidade é proporcional à distância do ponto à origem.

2. Seja $B$ um compacto com fronteira de conteúdo nulo e com interior não vazio e seja $\delta(x, y)$ contínua em $B$. Seja $\alpha \neq 0$ um real dado. Considere a mudança de coordenadas

3. Utilizando o teorema de Pappus (veja Vol. 1, 5.ª edição), calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno da reta dada, do conjunto $B$ dado.

*a*) $B$ é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ e $y = x + 2$ a reta.
*b*) $B$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x^2 \leq y \leq x$ e $y = x - 1$ a reta.
*c*) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ e $x + y = 3$ a reta.

*Exercícios 5.4*

1. Calcule

a) $\iiint_B xyz\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o paralelepípedo $0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1$ e $1 \leqslant z \leqslant 2$.

b) $\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ e $x + y \leqslant z \leqslant x + y + 1$.

c) $\iiint_B \sqrt{1 - z^2}\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ e $0 \leqslant y \leqslant z$.

d) $\iiint_B \sqrt{1 - z^2}\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o cubo $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$.

e) $\iiint_B dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2x$.

f) $\iiint_B (x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$.

g) $\iiint_B dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2x + 2y - 1$.

h) $\iiint_B y\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 + 4y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$.

i) $\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0$, e $x + y \leqslant z \leqslant x + y + 1$.

j) $\iiint_B 2z\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 + y^2 \leqslant 1, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ e $z \geqslant 0$.

l) $\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 - y^2 \leqslant z \leqslant 1 - 2y^2$.

m) $\iiint_B e^{x^2}\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$.

n) $\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant z \leqslant x + y$.

o) $\iiint_B 2z\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, z \geqslant 0$.

p) $\iiint_B 2z\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leqslant 4, z \geqslant 0$.

q) $\iiint_B \cos z\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ e $x - y \leqslant z \leqslant x + y$.

r) $\iiint_B (y - x)\,dx\,dy\,dz$ onde $B$ é o conjunto $4 \leqslant x + y \leqslant 8, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x}, y > x$ e $0 \leqslant z \leqslant \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x+y}}$.

2. Calcule o volume do conjunto dado. (Sugerimos ao leitor desenhar o conjunto.)

a) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 5 - x^2 - 3y^2$.

b) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ e $0 \leq z \leq x + y^2$.

c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

d) $x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1$.

*f*) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$.

*g*) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ $(a > 0, b > 0 \text{ e } c > 0)$.

*h*) $x^2 + y^2 \leq z \leq 4x + 2y$.

*i*) $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.

*j*) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2}$.

*l*) $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$, $z \geq 0$ $(a > 0)$.

*m*) $x^2 + y^2 \leq a^2$ e $x^2 + z^2 \leq a^2$ $(a > 0)$.

*n*) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ e $z \geqslant \dfrac{a}{2}$ $(a > 0)$.

*o*) $x^2 \leq z \leq 1 - y$ e $y \geq 0$.

*p*) $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2a^2 - x^2$ $(a > 0)$.

*q*) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ e $z \leq x^2 + y^2$.

*r*) $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4$ e $4x^2 + 9y^2 \leq 1$.

3. Calcule a massa do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$, cuja densidade no ponto $(x, y, z)$ é a soma das coordenadas.

4. Calcule a massa do sólido $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, sendo a densidade dada por $(x, y, z) = x + y$.

5. Calcule a massa do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 2$, sabendo que a densidade no ponto $(x, y, z)$ é o dobro da distância do ponto ao plano $z = 0$.

6. Calcule a massa do cone $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$, sendo a densidade no ponto $(x, y, z)$ proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo $z$.

*Exercícios 5.5*

1. Calcule

   *a)* $\iiint_B x \, dx \, dy \, dz$ onde $B$ é o conjunto $x \geqslant 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$.

   *b)* $\iiint_B z \, dx \, dy \, dz$ onde $B$ é o conjunto $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$.

   *c)* $\iiint_B x \, dx \, dy \, dz$ onde $B$ é o conjunto $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

   *d)* $\iiint_B \sqrt{x + y} \sqrt[3]{x + 2y - z} \, dx \, dy \, dz$ onde $B$ é a região $1 \leqslant x + y \leqslant 2$, $0 \leqslant x + 2y - z \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$.

   *e)* $\iiint_B z \, dx \, dy \, dz$ onde $B$ é o conjunto $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

   *f)* $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ onde $B$ é a interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$, com o cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2. Calcule o volume do elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

3. Calcule a massa do sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ e $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, supondo que a densidade no ponto $(x, y, z)$ é proporcional à distância deste ponto ao plano $xy$.

4. Calcule o volume do conjunto $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ $(a > 0)$.

5. Calcule o volume do conjunto $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2ax$ $(a > 0)$.

*Exercícios 5.7*

1. Calcule o momento de inércia do corpo homogêneo $x + y + z \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, em relação ao eixo $z$.

2. Calcule o momento de inércia do cubo homogêneo de aresta $L$, em relação a um eixo que contém uma das arestas.

3. Considere o cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$ e suponha que a densidade no ponto $(x, y, z)$ seja $x$.

   *a*) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo $Oz$.
   *b*) Calcule o centro de massa.

4. Considere o cilindro homogêneo $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ e $0 \leq z \leq h$.

   *a*) Calcule o momento de inércia em relação à reta $x = a$ e $y = 0$.
   *b*) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo $Oz$.

5. (*Teorema de Steiner ou dos eixos paralelos*.) Seja $I_{cm}$ o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa de um corpo e $I$ o momento de inércia em relação a um eixo paralelo, a uma distância $h$. Verifique que $I = I_{cm} + Mh^2$, onde $M$ é a massa do corpo.

6. Aplique o teorema de Steiner ao item *b* do Exercício 4.

7. Calcule o centro de massa da semiesfera homogênea $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e $z \geq 0$ ($R > 0$).

8. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio $R$, em relação a um eixo cuja distância ao centro seja $h$.

9. Considere um cone circular reto homogêneo de altura $h$ e raio da base $R$.

   *a*) Calcule o centro de massa.
   *b*) Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo.