Comentários sobre a aula de quinta-feira 02/06 e a ultima lista de exercisios

Nas aulas de hoje fizemos a diagonalização da matriz
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Para entender isto, ler Example 5.16 do livro do Poole (em ingles, infelizmente!) colocado no site, "PooleConics", que é parecido.

Brevemente,

Definition 0.1. Uma matriz M $(n \times n)$ tem *autovetor* $\mathbf{v}$ com *autovalor* λ sse $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Isto vále sse

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

mas

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = (M - \lambda I)\mathbf{v}$$

dai isto tem solução não-$\mathbf{0}$ sse $N = M - \lambda I$ é não-invertivel sse $\det N = 0$.

Dai para achar autovetores (se existem!) do M,
(1) procuramos os possiveis autovalores, que são exatamente os raizes do *polinomio carateristico* do M, $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$.
(2)para cada raiz, procuramos um autovetor, como feito nos exemplos.
(3)se temos n autovalores e vetores, podemos *diagonalizr* a matriz, isto é, achar uma nova base para $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz neste base é diagonal. A matriz que dar a mudança de base e simplesmente feito com colunas iguais os autovetores, como nos exemplos.

O polinomio carateristico da matriz A é por definição $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$; tem fatorização $p(\lambda) = (\lambda - \lambda^+)(\lambda - \lambda^-)$ para $\lambda^\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Um autovetor correspondendo ao valor λ é $(x, 1)$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

dai $x = \lambda$. Notando que $\lambda^+\lambda^- = -1$, os autovetores $(\lambda^\pm, 1)$ de fato são ortogonais, e podem ser normalizadas para autovetores $\mathbf{v}^\pm$. Definamos B igual a matriz com colunas $\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-$. Segue que $B^{-1}AB = D$ é diagonal onde $D = \begin{bmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{bmatrix}$.

Utilizando isto, calculamos os auto-valores e vetores para $M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (sem fazer trabalho nenhuma) e calculamos M^{99} sem trabalhar. Veja os exercisios no pagina 281 do Poole na Lista 3.

É claro que nas aulas a explicação foi muito mais completa!

O que deveria estudar: Vamos tirar da Lista 3 exercisios 35, 36, 37, 38 da §4.4 sobre Cayley-Hamilton. A restante vále. Do parte do Poole em ingles, deveria ler Example 5.16, fazer Exercises 5.4 1,2,3,4,11, 15, ler Example 5.21, ler paginas 410, 411, 412, Example 5.26, 5.27, 5.28, 5.29. Resolver Exercise 5.5 7, 8, 9, 13.

Albert M. Fisher, Dept Mat IME-USP, Caixa Postal 66281, CEP 05315-970 São Paulo, Brazil

URL: `http://ime.usp.br/~afisher`

E-mail address: `afisher@ime.usp.br`