

Algoritmos de Amostragem Puntual

Renderização de Curvas

Antonio Elias Fabris

1º Semestre de 2001

Slide 1

(a) *Representação Explícita*: $y = f(x)$

- indicada para alguns tipos de modelagem (e.g. relêvos topográficos)
- dado x , não é possível obter mais de um y
- curvas com tangentes verticais não são representáveis

(b) *Representação Implícita*: $f(x, y) = 0$

- $f(x, y)$ é uma espécie de “distância” entre os pontos do espaço e da curva: verificar se um ponto pertence à curva, ou de de que lado e quão longe é fácil
- não gera diretamente amostra de pontos da curva
- dados dois segmentos de curvas, concordância das tangentes nas extremidades é difícil .

Slide 2

(c) *Representação Paramétrica*: $Q(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$

- visualização: gerar amostra de pontos da curva é trivial
- concordância das tangentes “extremas” é tratável
- saber se $P \in R^2$ pertence à curva requer verificar se a equação $Q(t) = P$ tem solução para algum t : difícil

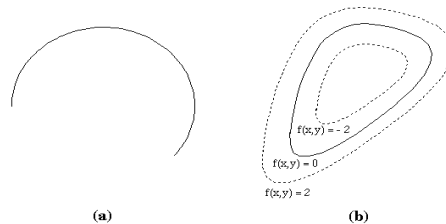
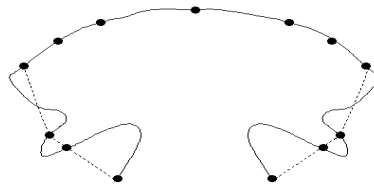


Figura 1: (a) Só paramétrica (b) Tratamento global: implícita

Slide 3

Interpolação de Lagrange

INADEQUADA em razão do fenômeno de Rünge (1903):



SOLUÇÃO \leadsto **SPLINES**:

(I) Dividir a curva em segmentos polinomiais t.q. evitem oscilações indesejáveis e permitam o controle da curvatura.

(II) Então, estabelecer condições para que: (a) as “colagens” sejam suficientemente lisas (b) e a curva seja gerada de modo eficiente (Schoenberg, \approx 1940).

Slide 4

Splines em Computação Gráfica

De Casteljaou, Pierre Bézier, Robin Forrest (60's, Renault)

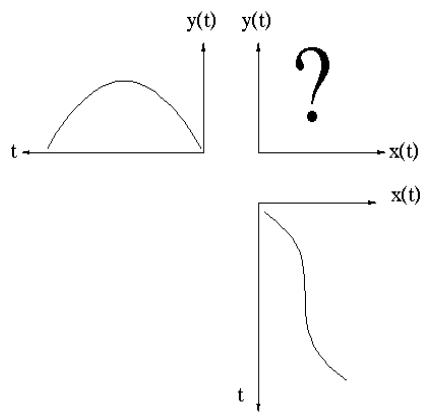
Steve Coons (60's, M.I.T.)

Principais representações para os segmentos polinomiais

- Hermite
- Bézier (De Casteljaou, Bézier, Forrest)
- B-spline (Coons, Forrest)

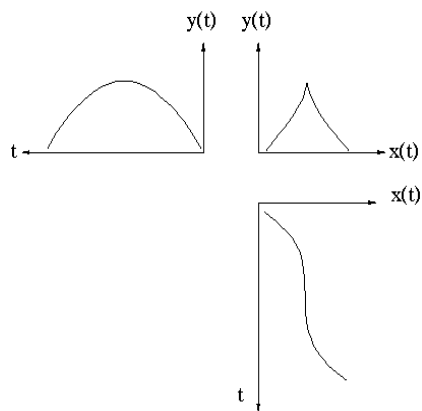
Slide 5

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 4t^3 - 6t^2 + 3t \\ -3t^2 + 3t \end{bmatrix} \quad t \in [0, 1]$$



Slide 6

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 4t^3 - 6t^2 + 3t \\ -3t^2 + 3t \end{bmatrix} \quad Q'(t) = \begin{bmatrix} 3(2t - 1)^2 \\ -6t + 3 \end{bmatrix}$$



Continuidade Geométrica G^1

- $Q(t)$ é G^0 contínua em t se $Q(t-) = Q(t+)$
- $Q(t)$ é G^1 contínua em t se for G^0 e existir $k > 0$ tal que $Q'(t-) = kQ'(t+)$ e $Q'(t-) \neq 0$

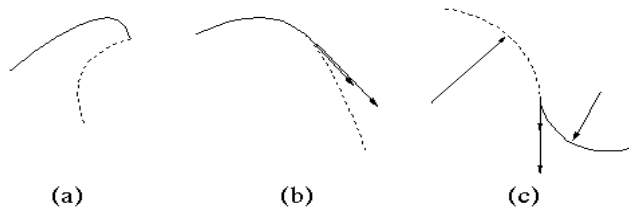
Em geral continuidade (paramétrica) C^1 implica continuidade (geométrica) G^1 . A única exceção ocorre quando a velocidade for zero. Para $t = 1/2$, a curva abaixo é C^∞ , G^0 mas não é G^1 .



Slide 7

Continuidade Geométrica G^1

- $Q(t)$ é G^0 contínua em t se $Q(t-) = Q(t+)$
- $Q(t)$ é G^1 contínua em t se for G^0 e existir $k > 0$ tal que $Q'(t-) = kQ'(t+)$ e $Q'(t-) \neq 0$



Slide 8

Figura 2: (a) G^0 (b,c) G^1 e não- C^1

Slide 9

Curvatura contínua e não C^2



$$Q(t) = \begin{cases} Q_1(t) = [2t^2, -t^2 + 2t] & 0 \leq t \leq 1 \\ Q_2(t) = [-2t^2 + 8t - 4, -t^2 + 2t] & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$Q'_1(t)(1) = Q'_2(t)(1) = [4, 0] \quad Q''_1(t)(1) \neq Q''_2(t)(1)$$

Slide 10

Continuidade Geométrica G^2

$Q(t)$ é G^2 contínua em t se for G^1 e existir $k > 0$ tal que
 $Q''(t-) - Q''(t+) = kQ'(t)$

Exemplo: a curva paramétrica $Q(t) = Q_1 \cup Q_2$ é G^2 contínua

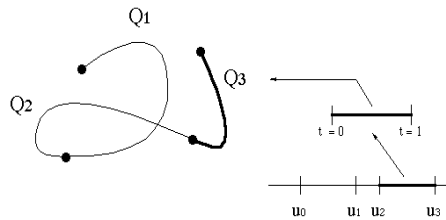


Splines Polinomiais

Por facilidade de notação nos restringiremos ao caso cúbico.
Reunião de segmentos de curvas $Q(t)$, cada qual dado por

$$Q(t) = [x(t) \ y(t)] \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \end{cases}$$

para $t \in [0, 1]$.



Slide 11

Curvas de Hermite Cúbicas

Um segmento polinomial cúbico $Q(t)$, $t \in [0, 1]$ fica unicamente determinado dados:

- seus extremos $P_1 = Q(0)$ e $P_4 = Q(1)$
- e os respectivos vetores tangentes $R_1 = Q'(0)$ e $R_4 = Q'(1)$



Slide 12

Determinação da Curva de Hermite

Resolver o sistema linear resultante da substituição das condições

$$Q(0) = P_1 \quad Q(1) = P_4 \quad Q'(0) = R_1 \quad Q'(1) = R_4$$

em

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}}_C \quad (1)$$

e

$$Q'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} C$$

Slide 13

$$\begin{aligned} P_1 = Q(0) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1] C \\ P_4 = Q(1) &= [1 \ 1 \ 1 \ 1] C \\ R_1 = Q'(0) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] C \\ R_4 = Q'(1) &= [3 \ 2 \ 1 \ 0] C \end{aligned} \iff C = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_H}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

Slide 14

$$Q(t) \stackrel{(1)}{=} TC = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_H} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_1 + (-2t^3 + 3t^2)P_4 + (t^3 - 2t^2 + t)R_1 + (t^3 - t^2)R_4$$

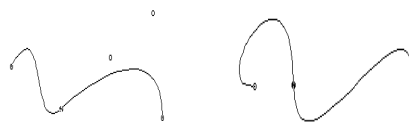
Slide 15

Cúbicas de Hermite

Slide 16

Curvas de Hermite concatenadas

Os dois splines são G^1 contínuos nos respectivos pontos de junção

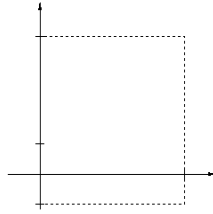


Slide 17

Curvas de Hermite - Comentários Finais

Base de Hermite:

$$\mathcal{B}_H = \left\{ \underbrace{2t^3 - 3t^2 + 1}_{P_1}, \underbrace{-2t^3 + 3t^2}_{P_4}, \underbrace{t^3 - 2t^2 + t}_{R_1}, \underbrace{t^3 - t^2}_{R_4} \right\}$$



Hermite quinticos: condições sobre

$$Q(0) \quad Q(1) \quad Q'(0) \quad Q'(1) \quad Q''(0) \quad Q''(1)$$

Slide 18

Curvas de Bézier

De Casteljau: construção por interpolações lineares sucessivas

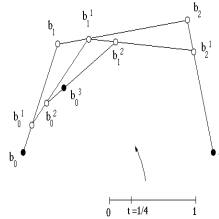
$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1$$

$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2$$

$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1 + tb_1^1$$

$$b_0^2(t) = (1-t)^2b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2b_2$$

Algoritmo de De Casteljau



Slide 19

$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1$$

$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2$$

$$b_2^1(t) = (1-t)b_2 + tb_3$$

$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1 + tb_1^1$$

$$b_1^2(t) = (1-t)b_1^1 + tb_2^1$$

$$b_0^3(t) = (1-t)b_0^2 + tb_1^2$$

$$b_0^3(t) = (1-t)^3 b_0 + 3t(1-t)^2 b_1 + 3t^2(1-t)b_2 + t^3 b_3$$