**MAT - 0315 - Introdução a Análise**

**2o. semestre 2005**

**Lista 1**

1. Reduza à forma de fração ordinária as dízimas periódicas abaixo:

| | |
|---|---|
| (a) 0,3457834578...; | (b) 0,170170...; |
| (c) 21,4545...; | (d) 5,219219...; |
| (e) 0,459104343461777...; | (f) 31,2222060606...; |
| (g) 0,0002727.... | (h) 913,199199199199... |

2. Mostre a seguinte regra: *toda dízima periódica simples (ou seja que o período começa logo após a vírgula) entre 0 e 1 é igual a uma fração ordinária, cujo numerador é igual a um período e cujo denominador é constituído de tantos* 9 *quantos são os algarismos do período.* Tente achar uma regra geral.

3. Diga quais números são racionais e quais são irracionais, justificando:

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; (c) $\sqrt[3]{2}$; (d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$;

(e) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; (f) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$; (g) $3,1416$;

(h) $1,2131415121314151...$ (i) $0,353355333555....$

4. (a) Mostre que $\sqrt{p}$ é um número irracional, onde $p > 1$ é um número primo qualquer.

(b) Prove que se $p$ e $q$ forem números primos distintos, então $\sqrt{pq}$ é irracional.

6. Em cada afirmação abaixo, mostre ou dê contra-exemplo:

(a) Se $a$ e $b$ são números irracionais, $\frac{a+b}{2}$ é irracional.

(b) A soma ou a diferena entre um número racional e um número irracional é um número irracional.

(c) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

(d) O produto de um número irracional por um número racional diferente de zero é um número irracional.

(f) Se $r$ é um número irracional não nulo, então $1/r$ também é irracional.

(g) Se $x$ e $y$ forem números irracionais tais que $x^2 - y^2$ seja racional não-nulo, então $x+y$ e $x-y$ serão ambos irracionais.

7. Utilizando o Teorema de Pitágoras e o fato de que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis, prove que não existe número racional cujo quadrado seja 2.

8. Verifique se os conjuntos abaixo são enumeráveis. Justifique as respostas.

(a) $A = \{2, 8, 13, 18, 23, 28, ...\}$

(b) $B = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$

(c) $C = \{\frac{p}{q} : q = 10^n$ para algum n $\}$.

(d) $D = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ onde $a$ e $b$ são números reais.