$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de MAT2458
Escola Politécnica – $2^{\underline{o}}$ semestre de 2014

1. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

   a. Existe uma transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação às bases canônicas é a matriz identidade.

   b. Se $T : P_8(\mathbb{R}) \to P_8(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então existe uma base de $P_8(\mathbb{R})$ tal que a matriz de T em relação a esta base é inversível.

   c. Se $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear injetora então para qualquer base de $\mathbb{R}^3$ a matriz de T em relação a esta base é inversível.

   d. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, existe uma base de V tal que a matriz de T em relação a esta base é inversível.

2. Determine a matriz do *operador derivação* $\mathcal{D} : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ definido por $\mathcal{D}(p) = p'$, relativamente à base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $P_4(\mathbb{R})$.

3. Considere os subespaços vetoriais U e V de $C^\infty(\mathbb{R})$ cujas bases são respectivamente $B = \{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ e $C = \{e^x \cos x, e^x \operatorname{sen} x, e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x\}$. Determine as matrizes dos *operadores de derivação* $f \in U \mapsto f' \in U$ e $f \in V \mapsto f' \in V$ com respeito às bases B e C, respectivamente.

4. Qual é a matriz, relativamente à base canônica, do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(2,3) = (2,3)$ e $T(-3,2) = (0,0)$?

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(-1,1), (0,1)\}$ é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Considere as seguintes afirmações:

   (I) $T(x,y) = (x, 3x + y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$;

   (II) a imagem pela transformação T da parábola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ é a parábola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 2x\}$;

   (III) o vetor $(2,3)$ pertence à imagem de T.

   Assinale a alternativa correta:

   a. apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

   b. apenas a afirmação (I) é verdadeira;

   c. todas as afirmações são verdadeiras;

   d. apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

   e. todas as afirmações são falsas.

6. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Obtenha números reais a, b, c de modo que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

7. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^{n+1} \to P_n(\mathbb{R})$ e $S : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definidas por $T(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $S(p) = \big(p(0), p(1), \ldots, p(n)\big)$. Determine as matrizes de $S \circ T$ e de $T \circ S$ com respeito às bases canônicas apropriadas.

8. Sejam F e G operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x,y,z) = (x, 2y, y-z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e tais que a matriz do operador $2F - G$ em relação à base $B = \big\{(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\big\}$ seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ache a matriz que representa o operador $F^2 + G^2$ com respeito às bases B e $C = \big\{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\big\}$.

9. Sejam $T, S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operadores lineares tais que

$$T(x,y,z) = (x+2y, y+2z, 3z), \quad x,y,z \in \mathbb{R}, \quad [S \circ T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz $[S]_{\text{can}}$ (ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de $[S]_{\text{can}}$) é igual a
(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 4; (e) 5.

10. Se $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ é a transformação linear cuja matriz em relação às bases $B = \{1, 1+t\}$ de $P_1(\mathbb{R})$ e $C = \{2+t^2, t+t^2, 1-t^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ é:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

então $T(1+2t)$ é igual a:

a. $1 + 7t^2$;
b. $3 + 4t - 2t^2$;
c. $5 + 4t - t^2$;
d. $-1 + 4t + 5t^2$;
e. $9 - 6t^2$.

11. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ e $G : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde:

$$B = \big\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\big\} \quad \text{e} \quad C = \big\{1, 1+x, x+x^2\big\}.$$

(a) Determine bases para $\ker(G \circ T)$ e $\ker(T \circ G)$.
(b) Seja $H = 3(T \circ G) + \mathrm{I}$. Determine $[H]_{DC}$, onde $D = \big\{1, x, x^2\big\}$.

12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) não existem a e b que tornem T injetora;
(b) T é bijetora para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$;
(c) T é bijetora para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq b$;
(d) não existem $a, b \in \mathbb{R}$ que tornem T sobrejetora;
(e) T é bijetora se $a = b$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que $T^2 = T$. Prove que $T = 0$ *ou* $T = \mathrm{Id}$ *ou* existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear não nulo tal que $T^2 = 0$. Prove que existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, w) = (-y, x - y, z, -w)$. Mostre que $T^6 = \mathrm{Id}$ e determine T^{-1}.

16. Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{R})$ então seu polinômio característico é dado por

$$p_A(t) = t^2 - a_1 t + a_0$$

onde $a_0 = \det(A)$ e $a_1 = \text{traço}(A)$.

17. Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável, então a matriz A^m é diagonalizável qualquer que seja o número natural m, $m \geq 1$.

18. Exiba uma matriz A *não diagonalizável* tal que a matriz A^2 seja *diagonalizável.*
Sugestão: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

19. Mostre que o operador linear $T : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dado por

$$T(u(x)) = \int_0^x u(s)ds$$

não tem autovalores.

20. Seja T um operador linear com autovalores 0, 1, 2 e 3. Assinale a alternativa contendo uma afirmação FALSA:

   (a) 5, 6, 9 e 14 são autovalores de $5\mathrm{Id} + T^2$;
   (b) T é inversível e 0, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são autovalores de T^{-1};
   (c) 0, 1, 4 e 9 são autovalores de T^2;
   (d) 0, 1, 8 e 27 são autovalores de T^3;
   (e) 0, 3, 6 e 9 são autovalores de $3T$.

21. Mostre que se λ é um autovalor do operador linear $T : V \to V$ e n é um número natural, então:
(a) λ^n é um autovalor de T^n.
(b) Se $f(t)$ é um polinômio qualquer então $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

22. Sejam V um espaço vetorial, $T : V \to V$ um operador linear, u um autovetor de T associado ao autovalor λ e v um autovetor de T associado ao autovalor μ. Pode-se afirmar que:

   (a) $u + v$ é autovetor de T se e somente se $\mu = \lambda$ e $u + v \neq 0$;
   (b) se $\lambda = \mu$ então $\lambda u + v$ não é um autovetor de T;
   (c) se $\lambda \neq \mu$ então u e v podem ser linearmente dependentes;
   (d) se $\lambda \neq \mu$ então, para todo $\beta \in \mathbb{R}$, $3u + \beta v$ é autovetor de T associado ao autovalor $3\lambda + \beta\mu$;
   (e) se $\lambda = \mu$ então $u - v$ é autovetor de T associado ao autovalor 0.

23. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear invertível. Prove que:
(a) Se λ é um valor próprio de T então $\lambda \neq 0$.
(b) λ é um valor próprio de T se, e somente se $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de T^{-1}(onde T^{-1} é o operador inverso de T).
(c) Se λ é um valor próprio de T, a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.

24. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$. Calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$.
Sugestão: Lembre-se de que $(M^{-1}BM)^n = M^{-1}B^nM$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

25. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (1,1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5,1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

26. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

27. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável. Quando for diagonalizável, determine uma matriz invertível M tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

28. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, onde $n \geq 2$. Assuma que a soma dos elementos de qualquer linha de A seja igual a 1. Assinale a alternativa correta:

   (a) A pode não possuir autovalores reais;
   (b) 1 e 0 são necessariamente autovalores de A;
   (c) A possui algum autovalor real, mas pode ser que nem 1 nem 0 sejam autovalores de A;
   (d) 1 é necessariamente autovalor de A, mas 0 pode não ser;
   (e) 0 é necessariamente autovalor de A, mas 1 pode não ser.

29. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação às bases $B = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ e $C = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{B,C}.$$

   a. Encontre os autovalores e autovetores de T.
   b. É T diagonalizável?

30. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3, $T : V \to V$ um operador linear e B uma base de V tal que:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ -3a & c & a \end{bmatrix},$$

   onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

   (a) se $b \neq a = 0$ então T não é diagonalizável;
   (b) se $|b| \neq 2|a|$ e $a \neq 0$ então T é diagonalizável;
   (c) se $a \neq 0$ e $b = 2a = c$ então T é diagonalizável;
   (d) se $a = b = 0$ e $c \neq 0$ então T é diagonalizável;
   (e) se $c = 0$ e $b = -2a \neq 0$ então T não é diagonalizável.

31. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico indicado por $p_T(t)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

   (a) $p_T(t) = t^4 - 1$
   (b) $p_T(t) = t^3(t+1)$, e $\dim \ker(T) = 2$.
   (c) $p_T(t) = t^2(t^2-4)$, e $\dim \ker(T) = 2$.

32. Sejam U um espaço vetorial de dimensão 5, $T\colon U \to U$ um operador linear e $p(t) = -t(t+1)^3(t+2)$ seu polinômio característico. Assinale a alternativa VERDADEIRA:

    (a) $\dim(\ker(T)) \geq 2$;

    (b) $\dim(\ker(T)) = 1$, $\dim(\ker(T+2I)) = 1$ e $\dim(\ker(T+I)) = 3$;

    (c) T é sobrejetor;

    (d) T não é diagonalizável pois $\dim(U) = 5$ e p possui apenas três raízes reais;

    (e) T é diagonalizável se, e somente se, existem $v_1, v_2, v_3 \in U$, linearmente independentes, tais que $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = -v_2$ e $T(v_3) = -v_3$.

33. Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n > 4$, $T\colon V \to V$ um operador linear com polinômio característico $p(t) = (1-t)(2-t)^3(3-t)^{n-4}$. Assinale a alternativa FALSA: O operador T é diagonalizável se, e somente se,

    (a) $\dim(\operatorname{Im}(T-3I)) - \dim(\ker(T-2I)) = 1$;

    (b) $V = \ker(T-I) + \ker(T-2\mathrm{Id}) + \ker(T-3I)$;

    (c) $\dim(\operatorname{Im}(T-I)) + \dim(\operatorname{Im}(T-2I)) + \dim(\operatorname{Im}(T-3I)) = n$;

    (d) $\dim(\ker(T-I)) + \dim(\ker(T-2I)) + \dim(\ker(T-3I)) = n$;

    (e) $\dim(\ker(T-2I)) + \dim(\ker(T-3I)) = n-1$.

34. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que todo vetor não nulo é um autovetor de T. Escreva então $Te_i = \alpha_i e_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ e can $= \{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.
(a) Calcule $T(e_1 + e_2 + e_3)$.
(b) Mostre que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.
(c) Prove que existe um número $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio característico de T seja

$$p_T(t) = (t-\alpha)^3.$$

(d) Conclua que $T = \alpha\mathrm{Id}$ onde Id é o operador identidade.

35. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que $\lambda \neq \mu$ sejam autovalores de T. Considere as seguintes afirmações:

    (I) se $\dim(V) - \dim\big(V(\lambda)\big) = 1$ então T é diagonalizável;

    (II) se $\dim(V) = \dim\big(V(\lambda)\big) + \dim\big(V(\mu)\big)$ então T é diagonalizável;

    (III) T é diagonalizável se e somente se $\dim(V) = 2$.

    Assinale a alternativa correta:

    (a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

    (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

    (c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

    (d) todas as afirmações são verdadeiras;

    (e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

36. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear tal que posto$(T) = 1$. Prove que *ou* T é diagonalizável *ou* T^2 é o operador nulo.

37. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^2 = T$.
(a) Prove que se λ é um autovalor de T então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
(b) Prove que $V = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$ e conclua que T é diagonalizável.

38. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ o operador linear tal que $T(M) = M^t$, onde $M \in M_n(\mathbb{R})$ e M^t é a transposta de M. Prove que T é diagonalizável.

39. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definida por $T(f(t)) = f(t+1)$ para todo $f(t) \in P_n(\mathbb{R})$. É T diagonalizável? Por que?

40. Seja $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base do espaço vetorial V e seja $T : V \to V$ o operador linear dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os subespaços $[v_1, v_2]$ e $[v_3, v_4]$ são invariantes sob T.
(b) Verifique que T não tem autovetores.

41. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de um espaço vetorial V e seja $T : V \to V$ um operador linear tal que:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) o subespaço $[e_1, e_2, e_4]$ é invariante por T;
(II) o subespaço $[e_2, e_4]$ é invariante por T;
(III) o subespaço $[e_1, e_3]$ é invariante por T.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

42. No $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual considere o subespaço $W = [(1,1,0,0,),(0,1,-1,1)]$.
(a) Determine bases ortonomais B e B' para W e $W^\perp$ respectivamente.
(b) Sendo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por $T(v) = \mathrm{proj}_W(v)$, determine a matriz de T em relação à base $B \cup B'$.
(c) Quais são os autovalores de T? É T diagonalizável?

43. Sejam T um operador simétrico num espaço vetorial de dimensão finita V com produto interno e λ um valor próprio de T. Mostre que o subespaço $(V(\lambda)^\perp)$ é invariante por T.

44. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:

(I) os únicos valores próprios de T são 2 e -2;
(II) T é simétrico;
(III) $V(2) = [(0,1,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,1)]$.

Temos que $T(3,-2,2,3)$ é igual a:

(a) $(6,4,4,6)$;
(b) $(-4,6,6,-4)$;
(c) $(6,4,-4,6)$;
(d) $(-6,-4,4,6)$;
(e) $(4,6,6,4)$.

45. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z) \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T é simétrico;

(b) o polinômino característico de T possui uma única raiz real;

(c) T não é injetor;

(d) T possui três valores próprios distintos;

(e) T possui dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2 tais que $\dim V(\lambda_1) = 1$ e $\dim V(\lambda_2) = 1$.

46. Seja V um espaço vetorial com produto interno $<,>$. Seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico e seja λ um valor próprio de T. Prove que $V(\lambda)^{\perp}$ é invariante sob T.

47. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:

(I) os únicos valores próprios de T são 2 e -2;

(II) T é simétrico;

(III) $V(2) = [(0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1)]$.

Calcule $T(3, -2, 2, 3)$. (resposta $(6, 4, -4, 6)$).

48. No $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde can é a base canônica de $\mathbb{R}^4$.
a) Mostre que T é diagonalizável.
b) Ache uma base *ortonormal* B de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_B$ seja diagonal.
c) Ache uma matriz real invertível M tal que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M$ seja diagonal.

49. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$T(x, y, z) = (4x + 2y + 2z, 6x + 2z, 12x + 4y + 2z).$$

(a) Ache uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de T.
(b) Considerando $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual mostre que *não existe* uma base *ortogonal* formada por vetores próprios de T.(Se ortogonalizarmos a base encontrada em (a) *não* obteremos uma base formada por *vetores próprios* de T. Por que?)

50. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cujos valores próprios são $2, -3$ e 0 e tal que $V(-3) = [(1, 1, 1)]$ e $V(2) = [(1, 0 - 1)]$. Seja

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

tal que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M$ (onde can indica a base canônica de $\mathbb{R}^3$) é diagonal.
(a) Exiba $[T]_{\text{can}}$.
(b) É T inversível? Justifique.
(c) É $v = (1, -2, 1)$ um vetor próprio de T? Justifique.

51. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z).$$

(a) Verifique que T é simétrico.
(b) Determine uma matriz M tal que $M^{-1}[T]_{\text{can}}M$ seja diagonal.

52. Sejam U um espaço vetorial de dimensão fnita munido de um produto interno, $T \colon U \to U$ um operador linear e u e v vetores próprios de T associados respectivamente a valores próprios distintos λ e μ. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\dim(U) = 3$ e $\dim(V(\lambda)) = 2$ então T é diagonalizível;
(II) se T é simétrico então $V(\lambda) = V(\mu)^{\perp}$;
(III) se $\langle u, v\rangle = 0$ então T é simétrico.

Assinale a alternativa VERDADEIRA.

(a) somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(b) todas as afirmações sã o verdadeiras;
(c) somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(d) somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) somente a afirmação (I) é verdadeira.

53. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, determine uma base ortonormal B formada por vetores próprios do operador simétrico T cuja matriz em relação à base canônica é:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

54. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno canônico. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) T não é simétrico, mas é diagonalizável;
(II) T é simétrico;
(III) T não é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

55. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico cujos autovalores são -2 e 3. Sendo $V(-2) = \text{Ker}(T + 2I) = [(1, 1, 1), (-1, 0, 1)]$, ache $[T]_{\text{can}}$, onde can é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

56. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

(I) se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T então T é simétrico;

(II) se T é simétrico e $u, v \in V$ são autovetores de T associados a um autovalor λ então u é ortogonal a v;

(III) T é simétrico se e somente se T é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

57. Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $T : E \to E$ um operador linear simétrico. Considere as seguintes afirmações:

(I) se B é uma base ortogonal de E então a matriz $[T]_B$ é simétrica;

(II) se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de T, A_1 e A_2 são conjuntos ortogonais de vetores de E tais que:

$$A_1 \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda_1 I), \quad A_2 \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda_2 I),$$

então a união $A_1 \cup A_2$ é um conjunto ortogonal;

(III) se B é uma base de E tal que a matriz $[T]_B$ é diagonal então B é ortonormal.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

58. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja W um subespaço de V e seja $T : V \to V$ definida por $T(v) = \mathrm{proj}_W(v)$, a projeção ortogonal de v em W.
(a) Prove que $T^2 = T$.
(b) Prove que $\mathrm{Ker}\, T = W^\perp$ e $\mathrm{Im}\, T = W$.
(c) Prove que existe uma base *ortonormal* B de V tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ onde o número de $1's$ na diagonal é igual à dimensão de W.
(d) Prove que T é um operador simétrico.

59. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja $S \neq V$ um subespaço de V e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico. Considere a afirmação abaixo:

$$\text{“Se } S \text{ é } \underline{\quad \text{(i)} \quad} \text{ então } S^\perp \text{ é } \underline{\quad \text{(ii)} \quad}\text{”.}$$

A substituição de (i) e (ii), respectivamente, pelas expressões abaixo que forma uma afirmação FALSA é:

(a) “invariante por T”, “autoespaço de T”;

(b) “a imagem de T”, “autoespaço de T”;

(c) “a imagem de T”, “o núcleo de T”;

(d) "autoespaço de T", "invariante por T";

(e) "o núcleo de T", "a imagem de T".

60. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e sejam $u, w \in V$ vetores não nulos. Defina $T : V \to V$ por $T(v) = \langle v, u \rangle w$ para todo $v \in V$. Prove que T é um operador simétrico se, e somente se u e w são vetores linearmente dependentes.

61. Estabeleça uma correspondência entre as equações

(1) $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$,	(2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,	(3) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$,
(4) $x^2 - y^2 - 1 = 0$,	(5) $x^2 + y^2 = 0$,	(6) $x - y^2 = 0$,
(7) $x^2 - y^2 = 0$,	(8) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,	(9) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$.

e os tipos de cônicas

(a) conjunto vazio,	(b) um ponto,	(c) uma reta,
(d) duas retas paralelas,	(e) duas retas concorrentes,	(f) elipse,
(g) hipérbole,	(h) parábola,	(i) circunferência.

62. Reconheça as seguintes cônicas dadas pelas suas equações em relação ao sistema de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(a) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$
(b) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
(c) $x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0$
(d) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

63. Reconheça as seguintes quádricas dadas pelas suas equações em relação ao sistema de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
(a) $2xy + z = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + z = 0$
(c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1$
(d) $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6$

64. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$ax^2 - 2xy + ay^2 - 1 = 0,$$

onde a é um número real não nulo. Considere também as seguintes afirmações:

(I) se $0 < a < 1$ então a equação define uma hipérbole;

(II) se $a > 1$ então a equação define uma elipse;

(III) se $a = 1$ então a equação define um par de retas paralelas.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;

(b) todas as afirmações são verdadeiras.

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(e) todas as afirmações são falsas.

65. (a) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância até a origem é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P ao eixo Oz. Que superfície é essa? Reconheça a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $y = 1$.

(b) Determine uma equação para a superfície formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao ponto $Q = (0, -1, -2)$ é igual a $\sqrt{2}$ vezes a distância de P à reta $r : \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$.

Determine uma equação reduzida da superfície. Que superfície é essa? Reconheça e encontre uma equação para a curva dada pela interseção dessa superfície com o plano $z = 0$.

(c) Refaça (b), considerando $Q = (0, -1, -1)$ e $r : \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$

66. Seja dado $k \in \mathbb{R}$. A equação:

$$5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 10x + 4y + 12z = k,$$

com incógnitas x, y, z, não tem solução se:

(a) $k = -11$; (b) $k = -11$; (c) $k = 11$; (d) $k = 22$; (e) $k = -22$.

RESPOSTAS

1. **a.** Sim;
   b. Não;
   c. Não;
   d. Sim.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$.

6. Considere, por exemplo, $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.

7. Ambas as matrizes são iguais a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 12 & 9 & -10 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

24. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 12 + 14^n & -4 + 4 \times 14^n \\ -3 + 3 \times 14^n & 1 + 12 \times 14^n \end{bmatrix}$

25. $(2^{-9} + 3 \times 2^{10}, -2^{-9} + 3 \times 2^{10})$

26. As respostas vão variar. Uma tal M é $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

27. (a) É diagonalizável. As respostas para M vão variar. Uma tal M é $M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

    (b)Não é diagonalizável. (c)Não é diagonalizável.

    (d)É diagonalizável. As respostas para M vão variar. Uma tal M é $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

29. (a)autovalores:-1 e 3;$V(-1) = [(1, 1, 0), (1, 1, 1)]$ e $V(3) = [(-1, 1, 0)]$. (b) Sim.

31. (a)Não. (b) Não. (c) Sim.

42. (a) $B=\{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0),(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{-2}{\sqrt{10}})\}$ e $B'=\{(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},0),(\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{-1}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}})\}$

(b)$[T]_{B\cup B'}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

47. $T(3,-2,2,3)=(6,4,-4,6)$.

48. (b)$\{(1,0,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}),(0,\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}),(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$ (c)As respostas vão variar. Use (b) para montar uma tal matriz M. Uma outra matriz M é

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

49. (a) $\{(1,0,-3),(0,-1,1),(1,1,2)\}$

50. (a)$[T]_{\text{can}}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Não (c) Sim

51. As respostas vão variar. Uma tal matriz M é $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

53. (a) $\{(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}),(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})\}$

(b) $\{(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}})\}$

55. $[T]_{\text{can}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -10 & 5 \\ -10 & 8 & -10 \\ 5 & -10 & -7 \end{bmatrix}$

61. 1-f, 2-a, 3-d, 4-g, 5-b, 6-h, 7-e, 8-i, 9-c

62. (a) elipse (b) parábola (c) hipérbole (d) duas retas concorrentes

63. (a) parabolóide hiperbólico (b) parabolóide hiperbólico
(c) hiperbolóide de uma folha (d) elipsóide

65. (a) é um cone. Equação: $z^2=x^2+y^2$. A curva é uma hipérbole com equação $z^2-x^2=1$.

(b) é um cone. Equação: $5x^2+3y^2-3z^2-8yz-10y-20z=25$.

Equação reduzida: $x''^2+y''^2-z''^2=0$

A curva é uma elipse com equação $15x^2+9(y-\frac{5}{3})^2=100$.

(c) é um cone. Equação: $x^2-2yz-2z-2y=2$.

equação reduzida: $x''^2+y''^2-z''^2=0$

A curva é uma parábola com equação $x^2-2y=2$.

Múltipla Escolha:

Ex. 5. (a);	Ex. 9. (a).	Ex. 10. (b).	
			12. (c).
20. (b).	22. (a).	28. (d).	30. (b).
32. (e).	33. (c).	35. (a).	41. (c).
44. (c).	45. (a).		
52. (e).	54. (e).	56. (d)	57. (b).
59. (a).	64. (b).	66. (e).	