MAT2457 - Álgebra Linear para Engenharia I

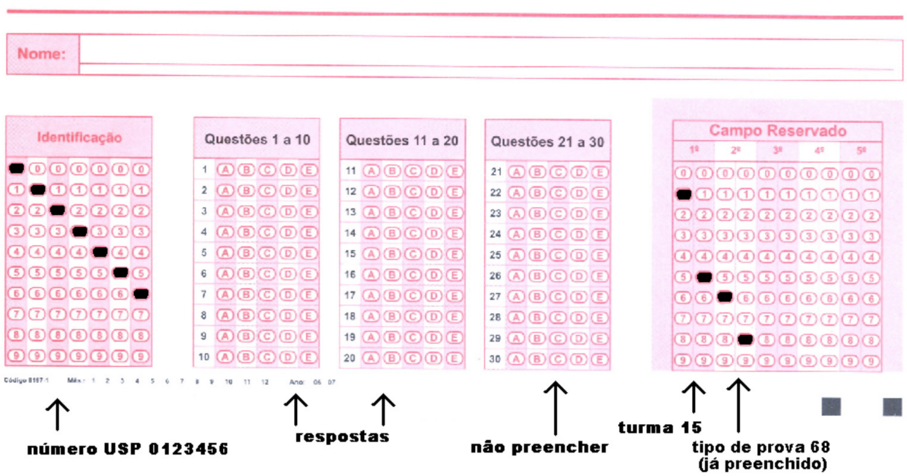
Prova 2 - 15/05/2013

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Professor: ______________________________ **Turma:** ______________

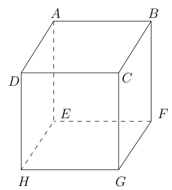
INSTRUÇÕES

(1) A prova tem início às 7:30 e duração de 2 horas.
(2) Não é permitido deixar a sala sem entregar a prova.
(3) Todo material não necessário à prova (mochilas, bolsas, calculadoras, agasalhos, bonés, celulares, livros, etc.) deve ficar na frente da sala.
(4) Sobre a carteira devem permanecer apenas lápis, caneta, borracha e documento de identidade com foto.
(5) É permitida a entrada na sala até as 8:00 e não é permitida a saída da sala antes das 8:40.
(6) As respostas devem ser transferidas para a folha óptica durante as 2 horas de prova (não há tempo extra para o preenchimento da folha óptica).
(7) Só destaque o gabarito do aluno (última folha) quando for entregar a prova. Não esqueça de anotar o tipo de prova no gabarito do aluno (para que você possa depois conferir suas respostas com o gabarito oficial).
(8) A folha óptica deve ser preenchida com caneta esferográfica azul ou preta.
(9) Para o correto preenchimento da folha óptica siga o exemplo abaixo.



Nas questões nas quais um sistema de coordenadas em E^3 não estiver especificado, deve-se levar em conta que todas as coordenadas estão dadas em um sistema de coordenadas de E^3 de base ortonormal e positiva.

Questão 1. Considere o cubo representado na figura abaixo e o sistema de coordenadas $\Sigma = \big(A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\}\big)$ em E^3.



Então, uma equação geral do plano que passa pelo ponto B e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{GA}$ e $\overrightarrow{HF}$ é dada por

a. $x - 2y + z - 1 = 0$
b. $2x - y - z - 2 = 0$
c. $-x + 2y - z - 2 = 0$
d. $x - 2y + z - 2 = 0$
e. $2x - y - z - 2 = 0$

Questão 2. Fixada uma orientação em V^3, dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, pode-se afirmar que

a. $(-\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (-\vec{u} - 3\vec{v}) = 2\vec{u} \wedge \vec{v}$.
b. se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ é uma base positiva de V^3.
c. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^4 \|\vec{v}\|^4$.
d. se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
e. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{v} = -\vec{u}$.

Questão 3. Sejam $A, B, C \in E^3$ os vértices de um triângulo. Suponha que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ e que a mediana relativa à base AC esteja contida na reta dada pelas equações $\dfrac{x+1}{2} = 1 - y = z$. Se $A = (1, 2, 3)$, então as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ são

a. $(1, 3, 2)$
b. $(-2, -2, 2)$
c. $(0, -4, -4)$
d. $(0, 2, 2)$
e. $(2, 4, 2)$

Questão 4. Considere fixada uma orientação em V^3 e seja E uma base ortonormal positiva de V^3. Se $\vec{a} = (-1, 0, 1)_E$, $\vec{b} = (1, -2, 1)_E$ e $\vec{x}$ é um vetor tal que $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$, então a soma das coordenadas de $\vec{x}$ com respeito à base E é igual a

a. -1
b. 1
c. 2
d. 3
e. 0

Questão 5. Sejam $A, B, C, D \in E^3$ vértices de um tetraedro tais que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2$ e $\|\overrightarrow{AD}\| = 3$. Se o ângulo no vértice A do triângulo ABC mede $2\pi/3$ radianos e a reta AD faz um ângulo de $\pi/3$ radianos com o plano ABC, então o volume do tetraedro $ABCD$ é igual a

a. $\sqrt{6}/2$
b. $3\sqrt{3}$
c. 1
d. $\sqrt{6}$
e. $3/2$

Questão 6. Considere os planos

$$\pi_1 : x + y + 3z = 1 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : x - z = 1.$$

Seja r a reta dada pela interseção de π_1 e π_2, e seja s a reta de equação $X = (3,0,1) + \lambda(2,1,2), \lambda \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações abaixo.

(I) π_2 e s são perpendiculares.

(II) r e s são ortogonais.

(III) π_1 e π_2 são perpendiculares.

Assinale a alternativa correta.

a. Nenhuma das três afirmações é verdadeira.

b. Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

c. Todas as três afirmações são verdadeiras.

d. Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

e. Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 7. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, sejam $X_0, X_1 \in E^3$ e sejam $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \in V^3$, com $\{\vec{m}, \vec{n}\}$ linearmente independente e $\vec{p} \neq \vec{0}$. Considere os planos

$$\pi_1 : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : X = X_0 + \lambda\vec{m} + \mu\vec{n} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

e a reta

$$r : X = X_1 + \lambda\vec{p} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Considere as afirmações abaixo.

(I) Se o vetor (a, b, c) é ortogonal aos vetores $\vec{m}$ e $\vec{n}$, e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, onde $(x_0, y_0, z_0) = X_0$, então $\pi_1 = \pi_2$.

(II) Se $[\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}] = 0$, então a reta r está contida no plano π_2.

(III) Se $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$, onde $(p_1, p_2, p_3) = \vec{p}$, e $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$, onde $(x_1, y_1, z_1) = X_1$, então a reta r está contida no plano π_1.

Está correto o que se afirma em

a. (I) e (II), apenas.

b. (III), apenas.

c. (I) e (III), apenas.

d. (I), (II) e (III).

e. (I), apenas.

Questão 8. Sejam E e F bases de V^3 tais que

$$F = \{(\alpha, \alpha, \alpha)_E, (0, \alpha, \alpha)_E, (0, 0, \alpha)_E\},$$

em que α é um número real não nulo. Se $\vec{v} = (1, -1, 2)_F$, então a soma das coordenadas de $\vec{v}$ com respeito à base E é igual a

a. 4α

b. 0

c. 2α

d. 3α

e. α

Questão 9. As trajetórias de duas partículas que se movimentam em E^3 são retilíneas e suas posições no instante t são dadas pelas equações $X = (1,1,0) + t(1,2,3)$ e $X = (2,3,3) + t(3,2,1)$. Dizemos que *haverá colisão* se existir um instante t em que as partículas se encontram em um mesmo ponto X. Então, podemos afirmar que

a. as trajetórias não se cruzam, pois são reversas.
b. as trajetórias são as mesmas, mas não haverá colisão.
c. as trajetórias não se cruzam, pois são paralelas e distintas.
d. as trajetórias se cruzam, mas não haverá colisão.
e. haverá colisão.

Questão 10. Considere os pontos $A = (0,2,3)$, $B = (1,2,4)$ e $C = (1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ de E^3 e seja D o ponto da reta de equação $X = A + t(0,1,3), t \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{BD}$ seja ortogonal ao vetor $(2,-1,1)$. Então, o volume do paralelepípedo de lados AB, AC e AD é

a. $9/4$
b. 2
c. 4
d. $8/3$
e. $3/2$

Questão 11. Considere as afirmações abaixo.

(I) Se $E = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ e $F = \{\vec{v}, \vec{u}, -\vec{w}\}$ são bases de V^3, então E e F têm a mesma orientação.

(II) Fixada uma orientação em V^3, se $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal positiva de V^3, então $F = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortogonal negativa de V^3.

(III) Fixada uma orientação em V^3, se $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ são tais que $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é linearmente independente, então $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{a}\}$ é uma base negativa de V^3.

Está correto o que se afirma em

a. (III), apenas.

b. (I), (II) e (III).

c. (I) e (II), apenas.

d. (I) e (III), apenas.

e. (II) e (III), apenas.

Questão 12. Sejam A, B, C, D quatro pontos de E^3 tais que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ seja linearmente independente. Seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo de lados AB, AC e AD. Considere as afirmações abaixo.

(I) O volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$ é igual à norma do produto vetorial de $\overrightarrow{AB}$ por $\vec{u}$, onde $\vec{u} = (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})\overrightarrow{AB}$.

(II) A altura do paralelepípedo $\mathcal{P}$ com relação à base ABC é igual a

$$\frac{|[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}]|}{\|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA}\|}.$$

(III) O vetor $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AD}$ é paralelo ao plano ABC.

Está correto o que se afirma apenas em

a. (II).

b. (II) e (III).

c. (I) e (II).

d. (III).

e. (I) e (III).

Questão 13. Sejam $A = (2, -1, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ pontos de E^3, e seja C a interseção da reta de equação $X = (0, 1, -1) + t(2, -1, 0), t \in \mathbb{R}$, com o plano de equação $x + y - z = 4$. Então, a medida da altura do triângulo ABC com respeito à base AB é igual a

a. $\sqrt{38/3}$
b. $2\sqrt{14/3}$
c. $2\sqrt{2}$
d. $\sqrt{8/3}$
e. 1

Questão 14. Seja $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Considere as retas r, s, t descritas abaixo.

$$r : \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \qquad s : x = \frac{y}{m} = z\,; \qquad t : \frac{1-x}{2} = y = -z - 1$$

Assinale a alternativa **FALSA**.

a. Existe um valor de m para o qual as retas r, s e t são paralelas a um mesmo plano.
b. As retas s e t são reversas se, e somente se, $m \neq -2$.
c. Se $m \neq 1$, então as retas r e s são reversas.
d. Se $m = 1$, então as retas r e s são paralelas.
e. As retas s e t são ortogonais se, e somente se, $m = 3$.

Questão 15. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, fixada uma orientação de V^3.

a. $[\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v}, \lambda\vec{w}] = \lambda^3[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.
b. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$.
c. Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente independente, então o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.
d. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
e. Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortogonal negativa de V^3 e $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 5$, então $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -5$.

Questão 16. Nesta questão considere coordenadas dadas com respeito a uma base ortonormal de V^3. Seja $\vec{u} \in V^3$. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $\vec{u}$ é ortogonal aos vetores $(1, 0, -1)$ e $(-1, 1, 3)$, e $\vec{u}$ forma ângulo obtuso (isto é, de medida superior a $\pi/2$ radianos) com o vetor $(0, 0, 1)$, se $x, y, z \in \mathbb{R}$ são tais que $\vec{u} = (x, y, z)$, então $x + y - z$ é igual a

a. $-\sqrt{6}$
b. 0
c. $-2\sqrt{6}$
d. $2\sqrt{6}$
e. $\sqrt{6}$

Gabarito do Aluno

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Tipo de prova: ______________

Questão	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐	☐