Convenções:

- Dado um inteiro positivo n, o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais será denotado por $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- Se A é uma matriz, a matriz transposta de A será denotada por A^{t}.
- Coordenadas de pontos estão dadas em relação a um sistema ortogonal.
- A norma (ou comprimento) de um vetor $\vec{u}$ será denotada por $\|\vec{u}\|$.
- Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S\colon \mathbb{R}^m \to R^p$ são funções, define-se a função composta de S com T como sendo a função $S \circ T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Q1. Se T é a rotação, em $\mathbb{R}^2$, em torno da origem, de ângulo $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário e $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação tal que $S \circ T$ é a reflexão em relação à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, então S é a reflexão em relação à reta

(a) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$
(b) $x = 0$
(c) $y = \frac{1}{2}x$
(d) $y = \sqrt{3}x$
(e) $y = x$

Q2. A respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que

(a) os únicos autovalores de A são 1 e 2.
(b) A tem três autovalores distintos.
(c) A possui um único autovalor.
(d) A tem exatamente dois autovalores distintos e não é diagonalizável.
(e) A tem exatamente dois autovalores distintos e é diagonalizável.

Q3. Se $P = (a, b, c)$ é o ponto de encontro entre as retas

$$r : \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \ -x + 3 = y = z - 1,$$

então $a + b + c$ é igual a:

(a) 5
(b) 8
(c) 4
(d) 6
(e) 7

Q4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A respeito do sistema

$$(*) \quad \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 2b \\ -5y + 2az = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

é correto afirmar que

(a) se $a = 2$ e $b \in [0, 1]$, então $(*)$ uma única solução.
(b) se $a \neq 2$ e $b \in [0, 1]$, então $(*)$ tem solução.
(c) se $a = b = 1/2$, então $(*)$ tem uma única solução.
(d) se $b = -1/2$ e $a \neq 2$, então $(*)$ tem infinitas soluções.
(e) se $b \neq -1/2$ e $a = 2$, então $(*)$ tem infinitas soluções.

Q5. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3}$, e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $\pi/3$ radianos, então o valor de $\|\vec{v}\|$ é

(a) $\sqrt{2}/2$

(b) 1

(c) $\sqrt{3}$

(d) $1/2$

(e) $\sqrt{3}/2$

Q6. Considere o plano π de equação $x+y+z=0$ e seja r a reta perpendicular a π tal que $B = (3, -1, 4)$ seja o ponto simétrico do ponto $A = (2, 1, 3)$ com relação a r. Se $P = (a, b, c)$ é o ponto de encontro entre r e π, então $-2a+b+2c$ é igual a

(a) 2

(b) 0

(c) -1

(d) 1

(e) -2

Q7. Dado que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} X(t)$$

é

(a) $X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(b) $X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(c) $X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(d) $X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

(e) $X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

Q8. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito de uma matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Se A é diagonalizável e invertível, então sua inversa A^{-1} também é diagonalizável.

(b) A e sua transposta A^{t} possuem os mesmos autovalores.

(c) Se A é diagonalizável, então A possui n autovalores distintos.

(d) Se A é diagonalizável, então sua transposta A^{t} também é diagonalizável.

(e) Se A possui n autovalores (reais) distintos, então A é diagonalizável.

Q9. Considere o plano $\pi : \ x - 2y + 2z - 5 = 0$. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\vec{u}$ é paralelo a π, $\vec{v}$ é ortogonal a π e $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3, -1)$, então a soma das coordenadas de $\vec{u}$ é igual a

(a) $10/3$

(b) 4

(c) $14/3$

(d) 2

(e) $-2/3$

Q10. Considere o plano π de equação $ax + by + cz - 12 = 0$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabendo que $B = (-1, 6, 5)$ é o ponto simétrico do ponto $A = (1, 2, 3)$ em relação a π, pode-se afirmar que $a + b + c$ é igual a

(a) 0

(b) -4

(c) -2

(d) 4

(e) 2

Q11. Seja A uma matriz $n \times n$ e suponha que a única solução do sistema $AX = 0$ seja a solução nula. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) A matriz transposta A^{t} de A tem determinante não nulo.

(b) 0 é um autovalor de A.

(c) Se R é uma matriz escalonada obtida a partir de A por operações elementares sobre linhas, então R não tem linhas nulas.

(d) Para todo $b \in \mathbb{R}^n$, o sistema $AX = b$ tem uma única solução.

(e) Se B é uma matriz $n \times n$ tal que $BA = 0$, então $B = 0$.

Q12. Considere as seguintes afirmações a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

(I) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0} = \vec{w} \wedge \vec{v}$, então $\vec{w} = \vec{0}$.

(II) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.

(III) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

É correto o que se afirma em

(a) (I) e (II), apenas.

(b) (I), (II) e (III).

(c) (II) e (III), apenas.

(d) (II), apenas.

(e) (I) e (III), apenas.

Q13. Considere a reta $r : \begin{cases} x = m + 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + nz \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$ em que $m, n \in \mathbb{R}$. Se a distância entre r e o plano de equação $x + 2y + 3x - 6 = 0$ é $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$, então $m + n$ é igual a

(a) 2 ou -4
(b) 0 ou 2
(c) 2 ou -2
(d) 0 ou -2
(e) 0 ou -4

Q14. A respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, em que $a \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que

(a) se A é diagonalizável, então $a > 4$.
(b) se $a > 4$, então A é diagonalizável.
(c) se A é diagonalizável, então $a \leq 0$.
(d) se $a = 0$, então A é diagonalizável.
(e) se $a = 3$, então A é diagonalizável.

Q15. Assinale a afirmação **FALSA** a respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, em que $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os autovalores de A são as raízes reais do polinômio $(x^2 - a)(x - a)$.
(b) Se $0 \leq a < 1/2$, então A é diagonalizável.
(c) Se $a = 1/2$, então A é diagonalizável.
(d) Se $a = 0$, então 0 é um autovalor de A, de multiplicidade 3.
(e) Se A é diagonalizável, então $a > 0$.

Q16. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação matricial induzida pela matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Assinale a afirmação **FALSA**.

(a) Se T é uma isometria, então $a^2 + b^2 = 1$.

(b) Se $a^2 + b^2 = 1$, então T é uma isometria.

(c) Se a imagem, por T, do quadrado unitário tem área 1, então T é uma isometria.

(d) Se T é uma isometria, a imagem, por T, do quadrado unitário tem área 1.

(e) A imagem, por T, do quadrado unitário tem área 1, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.