Convenções:

- Coordenadas de pontos estão dadas em relação a um sistema ortogonal.
- A norma (ou comprimento) de um vetor $\vec{u}$ será denotada por $\|\vec{u}\|$.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ será denotada por $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.
- Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S\colon \mathbb{R}^m \to R^p$ são funções, define-se a função composta de S com T como sendo a função $S \circ T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por $(S \circ T)(v) = S\big(T(v)\big)$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Q1. Se o vetor (a, b, c) é combinação linear dos vetores $(1, -2, -1)$, $(-2, 1, 3)$ e $(-1, -4, 3)$, então $5a + b$ é igual a

(a) c
(b) $3c$
(c) $-3c$
(d) $-c$
(e) $-2c$

Q2. Seja b o valor da soma das entradas de uma matriz 2×2 que tem $(2, -3)$ e $(4, -5)$ como autovetores associados aos autovalores -7 e 3, respectivamente. Então,

(a) $40 \leq b < 60$
(b) $0 \leq b < 20$
(c) $b \geq 60$
(d) $b < 0$
(e) $20 \leq b < 40$

Q3. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{a}\| = 1$ e $\|\vec{b}\| = 2$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $3 \leq (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \leq 15$.

(II) $\|\vec{a} - \vec{b}\| \neq 1/2$.

(III) $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{5}$ se, e somente se, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos.

Está correto o que se afirma em

(a) (III), apenas.
(b) (II) e (III), apenas.
(c) (I) e (III), apenas.
(d) (I), (II) e (III).
(e) (I) e (II), apenas.

Q4. A área do triângulo cujos vértices são os pontos de coordenadas $(1, 1, -1)$, $(1, 0, 1)$ e $(2, 2, -3)$ é igual a

(a) $\sqrt{5}$
(b) $5/2$
(c) $2\sqrt{5}$
(d) 5
(e) $\sqrt{5}/2$

Q5. Em $\mathbb{R}^2$, seja T a reflexão em relação à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e seja S a reflexão em relação à reta $y = \sqrt{3}x$. Então a transformação composta $S \circ T$ é a

(a) reflexão em relação à reta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.
(b) reflexão em relação à reta $y = x$.
(c) rotação, em torno da origem, de $\pi/3$ radianos no sentido horário.
(d) rotação, em torno da origem, de $\pi/6$ radianos no sentido anti-horário.
(e) rotação, em torno da origem, de $\pi/3$ radianos no sentido anti-horário.

Q6. Seja $a \in \mathbb{R}$. Então, para todos $b, c \in \mathbb{R}$, o sistema linear $\begin{cases} x + ay = b \\ ax + y = c \end{cases}$ é

(a) possível e determinado, se $a \neq -1$ e $a \neq 1$.
(b) impossível, se $a = 1$.
(c) possível e indeterminado, se $a \neq 1$.
(d) possível e determinado, se $a \neq 0$.
(e) possível e indeterminado, se $a \neq 0$.

Q7. Se (a, b, c) e (u, v, w) são as coordenadas dos pontos das retas

$$r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = 4 - 2\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R}) \quad ,$$

respectivamente, cuja distância coincide com a distância entre r e s, então $a+u$ é igual a

(a) 2
(b) 1
(c) 3
(d) 5
(e) 4

Q8. Seja R o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$, $(4,2)$ e $(3,0)$. Pode-se afirmar que

(a) se A é a matriz de uma transformação matricial que transforma o quadrado unitário em R, então $|\det A| \neq 6$.

(b) se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma tranformação matricial que transforma o quadrado unitário em R, então T é um cisalhamento em y.

(c) existem ao menos duas transformações matriciais de $\mathbb{R}^2$ que transformam o quadrado unitário em R.

(d) se A é a matriz de uma transformação matricial que transforma o quadrado unitário em R, então $\det A > 0$.

(e) se $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma tranformação matricial que transforma o quadrado unitário em R, então T é um cisalhamento em x.

Q9. Assinale a afirmação correta a respeito do plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = -1 + \lambda + 2\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

e das retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 9 \end{cases}$$

(a) r está contida em π, e s não é paralela a π.

(b) r e s não são concorrentes, nem são paralelas a π.

(c) r e s não são concorrentes e são, ambas, paralelas a π.

(d) r e s são concorrentes e estão, ambas, contidas em π.

(e) r e s são concorrentes, paralelas a π, mas não estão contidas em π.

Q10. A respeito do plano $\pi : x - 2y + 2z = 1$ e da reta $r : \dfrac{-x-1}{2} = \dfrac{2y-4}{2} = \dfrac{z-1}{2}$, está correto afirmar que

(a) r está contida em π.
(b) r é perpendicular a π.
(c) a distância entre π e r é $4/3$.
(d) a distância entre π e r é 5.
(e) a distância entre π e r é zero, mas r não é nem paralela nem perpendicular a π.

Q11. A soma das raízes do polinômio $p(x) = \det \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 & -2 \\ -2 & -2 & x & 4 \\ 4 & 4 & 4 & x \end{bmatrix}$ é igual a

(a) 0
(b) 4
(c) 16
(d) 8
(e) 2

Q12. Se $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\vec{w} = (1, 2, 1)$ são vetores tais que $\text{proj}_{\vec{w}}\, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{w}$, então $a + 2b + c$ é igual a

(a) 2
(b) -2
(c) 4
(d) 3
(e) 6

Q13. Seja A uma matriz 4×4 com autovalores $-3, -2, 1, 4$. Considere as seguintes afirmações:

(I) A é diagonalizável.
(II) A^2 é diagonalizável.
(III) $\det(A) = 24$.

Está correto o que ser afirma em

(a) (I), (II) e (III).
(b) (III), apenas.
(c) (II), apenas.
(d) (I) e (II), apenas.
(e) (II) e (III), apenas.

Q14. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{w}\| = 2$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $\pi/3$ radianos. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos ao plano de equação $x + y + z = 0$ e $\vec{w}$ é paralelo ao vetor $(1, 1, 1)$, então o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é

(a) $3\sqrt{3}$
(b) $6\sqrt{3}$
(c) 6
(d) $2\sqrt{3}$
(e) 3

Q15. Uma equação vetorial do plano que passa pelo ponto de coordenadas $(1,1,0)$ e contém a reta $\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ é

(a) $X=(0,1,2)+\lambda(1,1,2)+\mu(3,1,2) \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
(b) $X=(1,5,0)+\lambda(1,1,2)+\mu(2,1,2) \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
(c) $X=(-1,0,-2)+\lambda(1,0,0)+\mu(2,1,2) \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
(d) $X=(-1,0,-2)+\lambda(1,2,0)+\mu(2,1,2) \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
(e) $X=(1,1,0)+\lambda(1,0,0)+\mu(3,5,0) \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.

Q16. Sabendo que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, pode-se afirmar que a solução do sistema de equações diferenciais $X'(t)=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}X(t)$ que satisfaz a condição $X(0)=(0,-7)$ é

(a) $X(t)=2e^{-3t}(1,-3)-e^{4t}(2,1)$
(b) $X(t)=2e^{-3t}(1,-3)-2e^{4t}(2,1)$
(c) $X(t)=e^{-3t}(1,1)-e^{4t}(-6,1)$
(d) $X(t)=-2e^{-3t}(1,1)+e^{4t}(-6,1)$
(e) $X(t)=3e^{-3t}(1,-3)-e^{4t}(2,1)$