

Convenções:

- Dado um inteiro positivo n , o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais será denotado por $M_n(\mathbb{R})$.
- Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções, define-se a função composta de S com T como sendo a função $S \circ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Q1. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor 4, pode-se afirmar que a soma dos elementos na diagonal principal de A é

- (a) -5
- (b) 3
- (c) -4
- (d) -2
- (e) 5

Q2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação matricial que satisfaz $T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, e seja T^{-1} a transformação inversa de T . Então, a soma das coordenadas de $T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é

- (a) 2
- (b) -1
- (c) 3
- (d) -5
- (e) -4

Q3. Seja A uma matriz 3×3 com autovalores $-1, 1, 2$ e seja $B = A^3 - 5A^2$. Considere as seguintes afirmações:

- (I) B não é necessariamente diagonalizável.
- (II) B é diagonalizável e o valor de seu determinante é -288 .
- (III) A soma dos autovalores de B é -22 .

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (b) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (c) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (e) Todas as afirmações são falsas.

Q4. Assinale a afirmação verdadeira a respeito da transformação matricial T de \mathbb{R}^2 definida por $T(x, y) = \frac{1}{5}(-3x + 4y, 4x + 3y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) A imagem, por T , do quadrado unitário tem área estritamente maior do que 1.
- (b) T é uma rotação.
- (c) T é a projeção sobre reta $X = \lambda(2, 1)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- (d) T é a reflexão em relação à reta $X = \lambda(2, 1)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- (e) T é a reflexão em relação à reta $y = 2x$.

Q5. Considere as seguintes afirmações sobre o quadrado Q , em \mathbb{R}^2 , de vértices $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$ e $(0, -1)$.

- (I) Existe uma reflexão que transforma o quadrado unitário em Q .
- (II) Se a transformação matricial induzida por $A \in M_2(\mathbb{R})$ transforma o quadrado unitário em Q , então $\det(A) \neq 1$.
- (III) Existe uma rotação que transforma o quadrado unitário em Q .

Está correto o que se afirma em

- (a) (III), apenas.
- (b) (I) e (III), apenas.
- (c) (I), (II), (III).
- (d) (II), apenas.
- (e) (I), apenas.

Q6. Considere, em \mathbb{R}^2 , a projeção T sobre a reta $y = 2x$ e seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz de T . Considere as seguintes afirmações:

- (I) T é inversível.
- (II) A é diagonalizável e $(1, 2)$ é um autovetor de A .
- (III) Os autovalores de A são 0 e 1.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Todas as afirmações são falsas.
- (b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- (d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q7. Se $(2, 1)$ e $(1, 2)$ são autovetores da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associados aos autovalores -1 e 1 , respectivamente, então a soma das quatro entradas de A é igual a

- (a) 0
- (b) 3
- (c) $-2/3$
- (d) 5
- (e) $-4/3$

Q8. Considere, em \mathbb{R}^2 , a rotação S , em torno da origem, de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, e a transformação matricial T induzida pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}. \text{ Então, a transformação composta } T \circ S \text{ é}$$

- (a) um cisalhamento em y .
- (b) uma reflexão.
- (c) uma compressão em y .
- (d) uma expansão em x .
- (e) uma rotação.

Q9. A solução geral do sistema de equações diferenciais $\begin{cases} y' = -2y + z \\ z' = y - 2z \end{cases}$ é

- (a) $y(t) = -ce^t + de^{3t}$, $z(t) = ce^t - de^{3t}$ ($c, d \in \mathbb{R}$)
- (b) $y(t) = ce^t + de^{3t}$, $z(t) = ce^t - de^{3t}$ ($c, d \in \mathbb{R}$)
- (c) $y(t) = -ce^{-t} + de^{-3t}$, $z(t) = ce^{-t} - de^{-3t}$ ($c, d \in \mathbb{R}$)
- (d) $y(t) = ce^{-t}$, $z(t) = de^{-3t}$ ($c, d \in \mathbb{R}$)
- (e) $y(t) = ce^{-t} + de^{-3t}$, $z(t) = ce^{-t} - de^{-3t}$ ($c, d \in \mathbb{R}$)

Q10. Considere as seguintes afirmações a respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$:

- (I) A é diagonalizável e a soma de seus autovalores é -1 .
- (II) A entrada $(1, 1)$ de A^n é $\frac{2^{n+2} - (-3)^n}{5}$.
- (III) A entrada $(1, 1)$ de A^n é $\frac{2^{n+2} + (-3)^n}{5}$.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
- (b) Todas as afirmações são falsas.
- (c) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- (d) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- (e) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Q11. Assinale a afirmação correta a respeito das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) A , B e C são, duas a duas, semelhantes.
- (b) A e B são semelhantes, e B e C não são semelhantes.
- (c) B e C são semelhantes, e A e B não são semelhantes.
- (d) A e B não são semelhantes, e B e C também não são semelhantes.
- (e) A e C são semelhantes, e B e C não são semelhantes.

Q12. Seja T a transformação em \mathbb{R}^2 que resulta de uma rotação, em torno da origem, de 60° no sentido anti-horário, seguida por uma reflexão em relação à reta $y = x$. Se A é a matriz que induz a transformação T , então

- (a) T é uma rotação.
- (b) a matriz A não possui autovalores.
- (c) a soma dos elementos na diagonal principal de A é igual a 1.
- (d) T é uma isometria e $\det(A) = -1$.
- (e) T é a projeção sobre a reta $y = \frac{1}{4}x$.

Q13. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável se, e somente se,

- (a) $a \geq 0$ ou $b \geq 0$
- (b) $ab \neq 0$
- (c) $ab \geq 0$
- (d) $ab > 0$
- (e) $ab > 0$ ou $a = b = 0$

Q14. Considere o sistema de equações diferenciais $X' = AX$, em que A é a matriz que satisfaz $P^{-1}AP = D$, com

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ é a solução que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, então $x(1) + y(1) + z(1)$

é igual a

- (a) $2e^2 + e^4$
- (b) $e^2 + 2e^4$
- (c) $3e^2 + 6e^4$
- (d) $4e^2 + 2e^4$
- (e) $6e^2 + 3e^4$

Q15. Dadas transformações matriciais $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, pode-se afirmar que

- (a) se a matriz de T tem determinante 1, então a imagem, por T , do quadrado unitário é o quadrado unitário.
- (b) se T e S são reflexões, então a transformação composta $S \circ T$ é uma rotação.
- (c) se $T(1, 0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $T(0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, então T é uma projeção.
- (d) se T é uma rotação e S é uma reflexão, então a transformação composta $S \circ T$ pode ser uma rotação.
- (e) se $T(1, 0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $T(0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, então T é uma isometria.

Q16. Seja T a transformação de \mathbb{R}^2 dada pela rotação, em torno da origem, de $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário, seguida da reflexão em relação à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. A matriz de T é, então,

(a) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(b) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$