Convenções:

- Dado um inteiro positivo n, o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais será denotado por $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S\colon \mathbb{R}^m \to R^p$ são funções, define-se a função composta de S com T como sendo a função $S \circ T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por $(S \circ T)(v) = S(T(v))$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Q1. Considere as seguintes afirmações a respeito da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$:

(I) A é diagonalizável e a soma de seus autovalores é -1.

(II) A entrada $(1,1)$ de A^n é $\dfrac{2^{n+2} - (-3)^n}{5}$.

(III) A entrada $(1,1)$ de A^n é $\dfrac{2^{n+2} + (-3)^n}{5}$.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
(c) Todas as afirmações são falsas.
(d) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
(e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q2. Assinale a afirmação correta a respeito das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) A e B não são semelhantes, e B e C também não são semelhantes.
(b) A e B são semelhantes, e B e C não são semelhantes.
(c) B e C são semelhantes, e A e B não são semelhantes.
(d) A e C são semelhantes, e B e C não são semelhantes.
(e) A, B e C são, duas a duas, semelhantes.

Q3. Assinale a afirmação verdadeira a respeito da transformação matricial T de $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = \frac{1}{5}(-3x + 4y, 4x + 3y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) T é a reflexão em relação à reta $X = \lambda(2, 1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

(b) T é a reflexão em relação à reta $y = 2x$.

(c) T é uma rotação.

(d) T é a projeção sobre reta $X = \lambda(2, 1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

(e) A imagem, por T, do quadrado unitário tem área estritamente maior do que 1.

Q4. Seja $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor 4, pode-se afirmar que a soma dos elementos na diagonal principal de A é

(a) -4

(b) -2

(c) -5

(d) 5

(e) 3

Q5. Considere o sistema de equações diferenciais $X' = AX$, em que A é a matriz que satisfaz $P^{-1}AP = D$, com

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ é a solução que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, então $x(1)+y(1)+z(1)$ é igual a

(a) $3e^2 + 6e^4$
(b) $6e^2 + 3e^4$
(c) $e^2 + 2e^4$
(d) $4e^2 + 2e^4$
(e) $2e^2 + e^4$

Q6. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a projeção T sobre a reta $y = 2x$ e seja $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ a matriz de T. Considere as seguintes afirmações:

(I) T é inversível.
(II) A é diagonalizável e $(1, 2)$ é um autovetor de A.
(III) Os autovalores de A são 0 e 1.

Assinale a alternativa correta.

(a) Todas as afirmações são falsas.
(b) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(c) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
(d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
(e) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q7. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a rotação S, em torno da origem, de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, e a transformação matricial T induzida pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$. Então, a transformação composta $T \circ S$ é

(a) um cisalhamento em y.

(b) uma compressão em y.

(c) uma expansão em x.

(d) uma reflexão.

(e) uma rotação.

Q8. Se $(2, 1)$ e $(1, 2)$ são autovetores da matriz $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ associados aos autovalores -1 e 1, respectivamente, então a soma das quatro entradas de A é igual a

(a) $-4/3$

(b) $-2/3$

(c) 5

(d) 0

(e) 3

Q9. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável se, e somente se,

(a) $ab \neq 0$

(b) $ab \geq 0$

(c) $a \geq 0$ ou $b \geq 0$

(d) $ab > 0$

(e) $ab > 0$ ou $a = b = 0$

Q10. Seja T a transformação em $\mathbb{R}^2$ que resulta de uma rotação, em torno da origem, de 60° no sentido anti-horário, seguida por uma reflexão em relação à reta $y = x$. Se A é a matriz que induz a transformação T, então

(a) T é a projeção sobre a reta $y = \frac{1}{4}x$.
(b) T é uma rotação.
(c) a matriz A não possui autovalores.
(d) a soma dos elementos na diagonal principal de A é igual a 1.
(e) T é uma isometria e $\det(A) = -1$.

Q11. Considere as seguintes afirmações sobre o quadrado Q, em $\mathbb{R}^2$, de vértices $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$ e $(0,-1)$.

(I) Existe uma reflexão que transforma o quadrado unitário em Q.
(II) Se a transformação matricial induzida por $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ transforma o quadrado unitário em Q, então $\det(A) \neq 1$.
(III) Existe uma rotação que transforma o quadrado unitário em Q.

Está correto o que se afirma em

(a) (II), apenas.
(b) (I), apenas.
(c) (I) e (III), apenas.
(d) (I), (II), (III).
(e) (III), apenas.

Q12. Seja T a transformação de $\mathbb{R}^2$ dada pela rotação, em torno da origem, de $\frac{\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário, seguida da reflexão em relação à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. A matriz de T é, então,

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(c) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Q13. Seja A uma matrix 3×3 com autovalores $-1, 1, 2$ e seja $B = A^3 - 5A^2$. Considere as seguintes afirmações:

(I) B não é necessariamente diagonalizável.
(II) B é diagonalizável e o valor de seu determinante é -288.
(III) A soma dos autovalores de B é -22.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
(b) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(c) Todas as afirmações são falsas.
(d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
(e) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q14. A solução geral do sistema de equações diferencias $\begin{cases} y' = -2y + z \\ z' = y - 2z \end{cases}$ é

(a) $y(t) = -ce^{t} + de^{3t}, \quad z(t) = ce^{t} - de^{3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$
(b) $y(t) = ce^{-t} + de^{-3t}, \quad z(t) = ce^{-t} - de^{-3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$
(c) $y(t) = -ce^{-t} + de^{-3t}, \quad z(t) = ce^{-t} - de^{-3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$
(d) $y(t) = ce^{-t}, \quad z(t) = de^{-3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$
(e) $y(t) = ce^{t} + de^{3t}, \quad z(t) = ce^{t} - de^{3t} \quad (c, d \in \mathbb{R})$

Q15. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação matricial que satisfaz $T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$, e seja T^{-1} a transformação inversa de T. Então, a soma das coordenadas de $T^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ é

(a) 3
(b) -4
(c) -1
(d) -5
(e) 2

Q16. Dadas transformações matriciais $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pode-se afirmar que

(a) se T e S são reflexões, então a transformação composta $S \circ T$ é uma rotação.
(b) se T é uma rotação e S é uma reflexão, então a transformação composta $S \circ T$ pode ser uma rotação.
(c) se $T(1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $T(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, então T é uma isometria.
(d) se a matriz de T tem determinante 1, então a imagem, por T, do quadrado unitário é o quadrado unitário.
(e) se $T(1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $T(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, então T é uma projeção.