Convenções:

- A norma (ou comprimento) de um vetor $\vec{u}$ será denotada por $\|\vec{u}\|$.
- A projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ será denotada por $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$.
- O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, nesta ordem, será denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
- Coordenadas estão dadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

Q1. Sejam A, B, C e D pontos tais que

(i) $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 2$ e $\|\overrightarrow{BD}\| = 1$,

(ii) o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ mede $\pi/3$ radianos,

(iii) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano de equação $x - y + z = 0$, e

(iv) o vetor $(1, -1, 1)$ faz um ângulo de $\pi/3$ radianos com $\overrightarrow{BD}$.

Então, o volume do paralelepípedo que tem os segmentos AB, AC e AD como arestas vale

(a) 3

(b) $\sqrt{3}$

(c) $1/2$

(d) $\sqrt{3}/2$

(e) 1

Q2. Assinale a alternativa contendo equações de uma reta que passa pelo ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$ e que é paralela à reta de equação

$$\begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases} .$$

(a) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(b) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(c) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(d) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = -4 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(e) $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Q3. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$. Sabendo que

(i) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais,

(ii) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ mede $\pi/3$ radianos, e

(iii) $\|\vec{w}\| = 4\|\vec{u}\|$,

pode-se concluir que $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{u}$, em que λ é igual a

(a) $2/3$
(b) $3/2$
(c) $4/3$
(d) 2
(e) 3

Q4. Acerca do plano π de equação $x - 3y - z = 1$ e da reta r de equação

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases},$$

pode-se afirmar que

(a) r é perpendicular a π.
(b) r não é paralela e nem perpendicular a π, e um vetor diretor de r faz um ângulo de 45 graus com um vetor normal a π.
(c) r é paralela a π, mas não está contida em π.
(d) r está contida em π.
(e) r não é paralela e nem perpendicular a π, e um vetor diretor de r faz um ângulo de 60 graus com um vetor normal a π.

Q5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$ são vetores tais que $\text{proj}_{\vec{w}}\,\vec{v} = \vec{w}$, então $a - b + c$ é igual a

(a) -1
(b) 3
(c) 0
(d) 1
(e) 2

Q6. Seja r a reta contida no plano $\pi\colon 2x + y - z - 4 = 0$, que passa pelos pontos $(0, 5, 1)$ e $(1, 3, 1)$. Assinale a alternativa que contém as coordenadas de um ponto da reta perpendicular a r, contida em π, que passa por $(1, 3, 1)$.

(a) $(1, 2, 0)$
(b) $(-4, 0, -12)$
(c) $(-3, 1, -9)$
(d) $(2, 3, 3)$
(e) $(-1, 1, -5)$

Q7. Considere o triângulo de vértices $A = (1, 2, 0)$, $B = (2, 0, -1)$ e $C = (2, 1, 2)$. Seja D o ponto de interseção da reta que passa por A e B com a altura do triângulo em relação ao lado AB. Nessas condições, a soma das coordenadas de D vale

(a) $4/3$
(b) $8/3$
(c) $-4/3$
(d) $2/3$
(e) $-2/3$

Q8. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. As retas de equação

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 9 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x - 2y + \beta z = \beta \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

são ortogonais se, e somente se,

(a) $\alpha\beta + 2\alpha - \beta - 8 = 0$
(b) $\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 8 = 0$
(c) $\alpha\beta - 2\alpha + \beta + 8 = 0$
(d) $\alpha\beta + 2\alpha + \beta + 8 = 0$
(e) $\alpha\beta - 2\alpha - \beta - 8 = 0$

Q9. A distância entre a reta que passa pelos pontos $(-2,4,2)$ e $(2,0,0)$ e a reta dada por $\begin{cases} 2x+y+2z-4=0 \\ x-y+4z+7=0 \end{cases}$ é igual a

(a) $2\sqrt{3}$
(b) $3\sqrt{2}$
(c) 3
(d) 5
(e) 2

Q10. Considere as seguintes afirmações a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t} \in \mathbb{R}^3$:
(I) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} > 0$ implica $\vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}) > 0$
(II) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = 2\vec{t}$ implicam $(\vec{w} - 4\vec{v}) \wedge \vec{u} = -2\vec{t}$
(III) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| + \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
(b) Apenas (I) é verdadeira.
(c) (I), (II) e (III) são falsas.
(d) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.
(e) Apenas (II) é verdadeira.

Q11. Seja π o plano que passa por três pontos não alinhados A, B, C e seja π' o plano de vetor normal $\vec{n}$ e que passa pelo ponto D. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{n}] = 0$, então π e π' são paralelos.

(II) Se $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$ é paralelo a $\vec{n}$ e $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$, então $\pi = \pi'$.

(III) Se $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ faz um ângulo de 45 graus com $\vec{n}$, então π e π' não são paralelos nem perpendiculares.

Está correto o que se afirma em

(a) (II) e (III), apenas.

(b) (I) e (II), apenas.

(c) (III), apenas.

(d) (I), (II) e (III).

(e) (I) e (III), apenas.

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o plano $\pi\colon (a+3)x - 2y - (1+a)z = b$. Sabendo que a reta

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

está contida em π, pode-se afirmar que

(a) $a^2 + b^2 = 11$

(b) $a^2 + b^2 = 8$

(c) $a^2 + b^2 = 5$

(d) $a^2 + b^2 = 2$

(e) $a^2 + b^2 = 14$

Q13. O volume do tetraedro de vértices $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (0, 1, 2)$ e $D = (-2, 1, -2)$ é igual a

(a) 6
(b) 4
(c) 3
(d) 12
(e) 2

Q14. Considere as afirmações abaixo a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

(I) $\vec{u} = 2\vec{v} + 2\vec{w}$ implica $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\| + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|^2$
(II) Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são dois a dois ortogonais, então $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$
(III) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

Está correto o que se afirma em

(a) (II) e (III), apenas.
(b) (III), apenas.
(c) (I) e (III), apenas.
(d) (I), (II) e (III).
(e) (II), apenas.

Q15. A distância entre o ponto $(1,1,3)$ e o plano

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 + 2\lambda - \mu \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - \lambda + \mu \end{cases}$$

é igual a

(a) $1/\sqrt{2}$
(b) $12/\sqrt{3}$
(c) $5/\sqrt{2}$
(d) $3/\sqrt{14}$
(e) $12/\sqrt{14}$

Q16. A área do triângulo de vértices A, B, C, em que $A = (0,1,-1)$, $B = (1,2,-1)$ e C é o ponto tal que $\overrightarrow{AC} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AD}}\,\vec{u}$, com $\vec{u} = (-2,-1,-1)$ e $D = (2,2,1)$, é igual a

(a) $5/6$
(b) $7/6$
(c) $7/3$
(d) $5/3$
(e) $10/3$