

Convenções:

- A norma (ou comprimento) de um vetor \vec{u} será denotada por $\|\vec{u}\|$.
- A projeção ortogonal do vetor \vec{u} sobre o vetor \vec{v} será denotada por $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.
- O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, nesta ordem, será denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
- Coordenadas estão dadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

Q1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$ são vetores tais que $\text{proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \vec{w}$, então $a - b + c$ é igual a

- (a) -1
- (b) 3
- (c) 0
- (d) 1
- (e) 2

Q2. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. As retas de equação

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 9 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 2y + \beta z = \beta \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

são ortogonais se, e somente se,

- (a) $\alpha\beta - 2\alpha + \beta + 8 = 0$
- (b) $\alpha\beta + 2\alpha - \beta - 8 = 0$
- (c) $\alpha\beta + 2\alpha + \beta + 8 = 0$
- (d) $\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 8 = 0$
- (e) $\alpha\beta - 2\alpha - \beta - 8 = 0$

Q3. Assinale a alternativa contendo equações de uma reta que passa pelo ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$ e que é paralela à reta de equação

$$\begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases} .$$

(a) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = -4 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(b) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(c) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(d) $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(e) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Q4. Seja π o plano que passa por três pontos não alinhados A, B, C e seja π' o plano de vetor normal \vec{n} e que passa pelo ponto D . Considere as seguintes afirmações:

- (I) Se $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{n}] = 0$, então π e π' são paralelos.
- (II) Se $\vec{AB} \wedge \vec{BC}$ é paralelo a \vec{n} e $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 0$, então $\pi = \pi'$.
- (III) Se $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ faz um ângulo de 45 graus com \vec{n} , então π e π' não são paralelos nem perpendiculares.

Está correto o que se afirma em

- (a) (III), apenas.
- (b) (I), (II) e (III).
- (c) (I) e (II), apenas.
- (d) (I) e (III), apenas.
- (e) (II) e (III), apenas.

Q5. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de \mathbb{R}^3 , com $\vec{u} \neq \vec{0}$. Sabendo que

- (i) \vec{u} e \vec{v} são ortogonais,
- (ii) o ângulo entre \vec{u} e \vec{w} mede $\pi/3$ radianos, e
- (iii) $\|\vec{w}\| = 4\|\vec{u}\|$,

pode-se concluir que $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{u}$, em que λ é igual a

- (a) 2
- (b) $2/3$
- (c) $3/2$
- (d) $4/3$
- (e) 3

Q6. O volume do tetraedro de vértices $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (0, 1, 2)$ e $D = (-2, 1, -2)$ é igual a

- (a) 2
- (b) 4
- (c) 6
- (d) 3
- (e) 12

Q7. Seja r a reta contida no plano $\pi: 2x + y - z - 4 = 0$, que passa pelos pontos $(0, 5, 1)$ e $(1, 3, 1)$. Assinale a alternativa que contém as coordenadas de um ponto da reta perpendicular a r , contida em π , que passa por $(1, 3, 1)$.

- (a) $(-1, 1, -5)$
- (b) $(1, 2, 0)$
- (c) $(-3, 1, -9)$
- (d) $(-4, 0, -12)$
- (e) $(2, 3, 3)$

Q8. Sejam A, B, C e D pontos tais que

- (i) $\|\vec{AB}\| = 2$, $\|\vec{BC}\| = 2$ e $\|\vec{BD}\| = 1$,
- (ii) o ângulo entre \vec{AB} e \vec{BC} mede $\pi/3$ radianos,
- (iii) \vec{AB} e \vec{AC} são paralelos ao plano de equação $x - y + z = 0$, e
- (iv) o vetor $(1, -1, 1)$ faz um ângulo de $\pi/3$ radianos com \vec{BD} .

Então, o volume do paralelepípedo que tem os segmentos AB , AC e AD como arestas vale

- (a) $\sqrt{3}/2$
- (b) 3
- (c) 1
- (d) $\sqrt{3}$
- (e) $1/2$

Q9. Acerca do plano π de equação $x - 3y - z = 1$ e da reta r de equação

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases} ,$$

pode-se afirmar que

- (a) r não é paralela e nem perpendicular a π , e um vetor diretor de r faz um ângulo de 60 graus com um vetor normal a π .
- (b) r está contida em π .
- (c) r é perpendicular a π .
- (d) r não é paralela e nem perpendicular a π , e um vetor diretor de r faz um ângulo de 45 graus com um vetor normal a π .
- (e) r é paralela a π , mas não está contida em π .

Q10. Considere o triângulo de vértices $A = (1, 2, 0)$, $B = (2, 0, -1)$ e $C = (2, 1, 2)$. Seja D o ponto de interseção da reta que passa por A e B com a altura do triângulo em relação ao lado AB . Nessas condições, a soma das coordenadas de D vale

- (a) $2/3$
- (b) $-2/3$
- (c) $4/3$
- (d) $8/3$
- (e) $-4/3$

Q11. A distância entre a reta que passa pelos pontos $(-2, 4, 2)$ e $(2, 0, 0)$ e a reta dada por $\begin{cases} 2x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 4z + 7 = 0 \end{cases}$ é igual a

- (a) 3
- (b) 5
- (c) 2
- (d) $2\sqrt{3}$
- (e) $3\sqrt{2}$

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o plano $\pi: (a + 3)x - 2y - (1 + a)z = b$. Sabendo que a reta

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

está contida em π , pode-se afirmar que

- (a) $a^2 + b^2 = 2$
- (b) $a^2 + b^2 = 14$
- (c) $a^2 + b^2 = 5$
- (d) $a^2 + b^2 = 11$
- (e) $a^2 + b^2 = 8$

Q13. Considere as seguintes afirmações a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t} \in \mathbb{R}^3$:

- (I) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} > 0$ implica $\vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}) > 0$
- (II) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = 2\vec{t}$ implicam $(\vec{w} - 4\vec{v}) \wedge \vec{u} = -2\vec{t}$
- (III) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| + \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Assinale a alternativa correta.

- (a) (I), (II) e (III) são falsas.
- (b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
- (c) Apenas (II) é verdadeira.
- (d) Apenas (I) é verdadeira.
- (e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

Q14. Considere as afirmações abaixo a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

- (I) $\vec{u} = 2\vec{v} + 2\vec{w}$ implica $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\| + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|^2$
- (II) Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são dois a dois ortogonais, então $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$
- (III) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

Está correto o que se afirma em

- (a) (I) e (III), apenas.
- (b) (II), apenas.
- (c) (I), (II) e (III).
- (d) (II) e (III), apenas.
- (e) (III), apenas.

Q15. A distância entre o ponto $(1, 1, 3)$ e o plano

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 + 2\lambda - \mu \\ z = 1 - \lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

é igual a

- (a) $3/\sqrt{14}$
- (b) $5/\sqrt{2}$
- (c) $12/\sqrt{14}$
- (d) $12/\sqrt{3}$
- (e) $1/\sqrt{2}$

Q16. A área do triângulo de vértices A, B, C , em que $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 2, -1)$ e C é o ponto tal que $\overrightarrow{AC} = \text{proj}_{\overrightarrow{AD}} \vec{u}$, com $\vec{u} = (-2, -1, -1)$ e $D = (2, 2, 1)$, é igual a

- (a) $5/6$
- (b) $7/6$
- (c) $5/3$
- (d) $7/3$
- (e) $10/3$