Convenções:

- Se A é uma matriz, a matriz transposta de A será denotada por A^{t}.
- Coordenadas estão dadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

Q1. Considere a matriz $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, dada por $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Se $B = \begin{bmatrix} a & c & 5(b-2c) \\ d & f & 5(e-2f) \\ g & i & 5(h-2i) \end{bmatrix}$, sabendo que $\det(A) = 2$, pode-se afirmar que $\det(B^{-1})$ é igual a

(a) $-1/10$
(b) $-1/100$
(c) $-1/20$
(d) $1/100$
(e) $1/20$

Q2. Dados os pontos $A(1,2,3)$, $B(-1,2,-3)$, $C(4,1,-2)$ e $D(5,0,3)$, pode-se afirmar que

(a) o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é agudo, e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são paralelos.
(b) o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é agudo, e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são ortogonais.
(c) o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é obtuso, e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são paralelos.
(d) o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é obtuso, e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ não são paralelos.
(e) o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é agudo, e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ não são paralelos nem ortogonais.

Q3. Lembrando que o traço de uma matriz quadrada é a soma das entradas na diagonal principal da matriz, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, então o traço de A^{-1} é igual a

(a) 2
(b) -2
(c) 0
(d) -1
(e) 1

Q4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

e as afirmações abaixo:

(I) $\det(A) \neq \det(B)$
(II) $\det(A) = \det(B)$
(III) $\det(A^2B) = -6^3$
(IV) $\det(AB^2) = -4^3$

Está correto o que se afirma em

(a) (I), (III) e (IV), apenas.
(b) (II) e (IV), apenas.
(c) (I) e (III), apenas.
(d) (I) e (IV), apenas.
(e) (II) e (III), apenas.

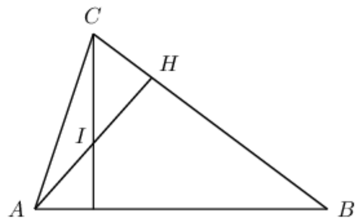
Q5. Seja A uma matriz $p \times n$ e seja B uma matriz $p \times 1$. Considere as seguintes afirmações sobre o sistema linear $AX = B$:

(I) Se $p > n$ e $B \neq 0$, então o sistema é impossível.
(II) Se $p < n$ e $B = 0$, então o sistema é possível indeterminado.
(III) Se $p = n$ e $B \neq 0$, então o sistema é possível determinado.

Está correto o que se afirma em

(a) (I) e (II), apenas.
(b) (I) e (III), apenas.
(c) (I), (II) e (III)
(d) (II), apenas.
(e) (II) e (III), apenas.

Q6. Considere o triângulo ABC tal que $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ e $\overrightarrow{BC} = (1, 2, -1)$. Seja H o ponto sobre a reta BC tal que $\overrightarrow{AH}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam ortogonais. Seja I o ponto onde se encontram as alturas do triângulo ABC.



Sabendo que $\overrightarrow{AH} = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, pode-se afirmar que as coordenadas de $\overrightarrow{AI}$ são

(a) $(\frac{8}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{4}{7})$
(b) $(\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0)$
(c) $(\frac{2}{7}, -\frac{1}{14}, \frac{1}{7})$
(d) $(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, 0)$
(e) $(\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$

Q7. Considere as afirmações abaixo sobre matrizes $A, B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

(I) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(II) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(III) $\det(A) = \det(A^{\mathrm{t}})$

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

(b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

(d) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

(e) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Q8. Sejam $m, n \in \mathbb{R}$. Considere as afirmações abaixo acerca do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + nx_3 = 0 \\ mx_1 + nx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(I) Se $n \neq m$, então o sistema tem uma única solução.

(II) Se $n = m$ e $m \neq 1$, então o número de variáveis livres do sistema é 1.

(III) Se $n = m$ e $m \neq -1$, então o número de variáveis livres do sistema é 2.

Está correto o que se afirma em

(a) (I), apenas.

(b) (II), apenas.

(c) (I) e (II), apenas.

(d) (I), (II) e (III).

(e) (I) e (III), apenas.

Q9. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Sabendo que $\vec{v} = (2, 3, 1)$, $\vec{w} = (-2, 2, -1)$ e que $\vec{u} - \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v}$, pode-se afirmar que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é igual a

(a) $-1/2$
(b) $1/2$
(c) 1
(d) -1
(e) 0

Q10. Uma caixa contendo moedas de 1, 5 e 10 centavos tem 13 moedas totalizando 83 centavos. Então, pode-se afirmar que o número de moedas de 1 somado com o número de moedas de 5 menos o número de moedas de 10 é igual a

(a) 1
(b) 5
(c) 7
(d) -5
(e) -1

Q11. Seja $a \in \mathbb{R}$, e considere os pontos $A(a, 1, a)$ e $B(1, a, 0)$ e o vetor $\vec{u} = (2, a, a)$. Então, $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal a $\vec{u}$ se, e somente se, a for igual a

(a) $2/3$ ou 2
(b) $-1/3$ ou $2/3$
(c) $-1/3$ ou 2
(d) $-1/3$
(e) $2/3$

Q12. Sejam $\vec{a}, \vec{b}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\|\vec{a}\| = 3$ e $\|\vec{b}\| = 2$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = 0$ se, e somente se, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

(II) $1 \leq \|\vec{a}+\vec{b}\| \leq 5$.

(III) $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{13}$ se, e somente se, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Está correto o que se afirma em

(a) (I) e (II), apenas.
(b) (I) e (III), apenas.
(c) (I), (II) e (III).
(d) (III), apenas.
(e) (II) e (III), apenas.

Q13. Se $x \in \mathbb{R}$, então $\det \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{bmatrix} = 0$ se, e somente se, x for igual a

(a) $1, 2, 3$ ou -4
(b) $1, 2, 3$ ou -8
(c) $1, 2, 3$ ou -10
(d) $1, 2, 3$ ou -12
(e) $1, 2, 3$ ou -6

Q14. Seja $\vec{u} = (a, 1-b, 2c)$ um vetor de $\mathbb{R}^3$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Uma condição necessária e suficiente para que $\vec{u}$ seja combinação linear dos vetores $(2, 2, 4)$ e $(0, 1, 3)$ é

(a) $a + 3b + 2c = 3$
(b) $2a + 3b + c = 3$
(c) $2a + b + 3c = 2$
(d) $3a + 2b + c = 2$
(e) $3a + 2b + c = 3$

Q15. Considere as afirmações abaixo a respeito de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$.

(I) Se $4\vec{u}+\vec{v}$ é ortogonal a $2\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$, então $\|\vec{v}\| = 4\|\vec{u}\|$.

(II) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$.

(III) Existe apenas uma quantidade finita de pares de vetores $\{\vec{u},\vec{v}\}$ com $\vec{u} \neq \vec{v}$ que satisfazem $\|\vec{u}-2\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 4\|\vec{v}\|^2 - 4\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

Está correto o que se afirma em

(a) (II) e (III), apenas.

(b) (I), apenas.

(c) (I), (II) e (III).

(d) (I) e (II), apenas.

(e) (I) e (III), apenas.

Q16. Seja $\vec{u}$ um vetor de $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, que $\vec{u}$ é ortogonal ao vetor $(1,-1,0)$ e que $\vec{u}$ faz um ângulo de 45 graus com o vetor $(1,0,1)$, pode-se afirmar que a soma das coordenadas de $\vec{u}$ vale

(a) 4 ou 20/3

(b) 4 ou $-14/3$

(c) -4 ou 14/3

(d) 20/3 ou -4

(e) 20/3 ou 14/3