$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de MAT2457
Escola Politécnica – $1^{\underline{o}}$ semestre de 2014

1. Determine $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} = (2,3,-1)$ e a $\vec{w} = (2,-4,6)$. Dos $\vec{u}$'s encontrados, qual é o que forma um ângulo agudo com o vetor $(1,0,0)$?

2. Determine a projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do vetor $\vec{v}$ nos casos:

   (a) $\vec{w} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (3,-1,1)$;

   (b) $\vec{w} = (-1,1,1)$, $\vec{v} = (-2,1,2)$.

3. Decomponha $\vec{w} = (-1,-3,2)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, sendo $\vec{w}_1$ paralelo ao vetor $(0,1,3)$ e $\vec{w}_2$ ortogonal a este último.

4. Decomponha $\vec{w} = (1,0,3)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, sendo $\vec{w}_1$, $(1,1,1)$, $(-1,1,2)$ coplanares e $\vec{w}_2$ ortogonal a estes dois últimos.

5. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todos os itens, $\vec{d}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representam vetores.

   (a) Se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ então $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$

   (b) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais, então $8\vec{v}$ e $-2\vec{w}$ também são ortogonais.

   (c) Se $-\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$, então $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.

   (d) Se a projeção $\text{proj}_{\vec{d}}\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.

   (e) Se $\text{proj}_{\vec{d}}\vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{d}$.

   (f) Se $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{d}$, então $\text{proj}_{\vec{d}}\vec{v} = \vec{v}$.

   (g) $\text{proj}_{\vec{3d}}\vec{v} = 3\text{proj}_{\vec{d}}\vec{v}$.

   (h) $\text{proj}_{\vec{d}}\vec{3v} = 3\text{proj}_{\vec{d}}\vec{v}$.

   (i) $\text{proj}_{\vec{d}}(\vec{u}+\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{d}}\vec{u} + \text{proj}_{\vec{d}}\vec{v}$.

   (j) $\text{proj}_{\vec{u}+\vec{v}}(\vec{d}) = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{d} + \text{proj}_{\vec{v}}\vec{d}$.

6. Calcule o *momento* em relação ao ponto O da força $\vec{f} = (-1,3,4)$, aplicada ao ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = (1,1,1)$ (esse momento é igual a $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}$).

7. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de lado unitário, calcule $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

8. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$ e $\overrightarrow{AB} = (0,1,3)$.

9. Resolva o sistema:
$$\begin{cases} \vec{x} \cdot (2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}) = 9, \\ \vec{x} \wedge (-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}) = -2\vec{\imath} + 2\vec{k}. \end{cases}$$

10. Determine $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \wedge (\vec{\imath} + \vec{k}) = 2(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})$ e $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$.

11. Sabe-se que $\vec{x}$ é ortogonal a $(1,1,0)$ e a $(-1,0,1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{x}$ e $(0,1,0)$, tem-se $\cos\theta > 0$. Determine $\vec{x}$.

12. Prove que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{w} = \vec{0}$. Interprete esse resultado geometricamente.

13. Seja $\vec{u} \neq \vec{0}$. Prove que se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{v} = \vec{0}$. Interprete esse resultado geometricamente.

14. Dados os seguintes conjuntos ordenados de vetores, determine se os vetores são coplanares, uma base positiva ou uma base negativa.

    (a) $\{(1,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0)\}$.
    (b) $\{(-1,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0)\}$.
    (c) $\{(1,0,1),\ (-2,1,0),\ (-1,1,-2)\}$.
    (d) $\{(1,2,-1),\ (1,3,2),\ (1,0,-7)\}$.
    (e) $\{(1,1,1),\ (0,1,-1),\ (-2,0,0)\}$.
    (f) $\{(1,1,1),\ (1,1,-1),\ (5,5,1)\}$.

15. Suponha que o conjunto ordenado $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base positiva. Qual a relação entre os números reais a,b,c, se o conjunto ordenado $\{a\vec{u},b\vec{v},c\vec{w}\}$ é uma base positiva?

16. Calcule a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

17. Sendo $\|\,\vec{u}\,\| = 26$, $\|\,\vec{v}\,\| = 3$ e $\|\,\vec{v}\wedge\vec{u}\,\| = 72$, calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sabendo-se que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo obtuso.

18. Seja $\vec{v} = (\vec{a}+\alpha\vec{b})\wedge(2\vec{a}+\vec{b})$, $\alpha\in I\!R$, onde $\|\,\vec{a}\,\| = \sqrt{2}$, $\|\,\vec{b}\,\| = 1$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Calcule α para que tenhamos $\|\,\vec{v}\,\| = 1$.

19. Seja M o ponto de encontro das diagonais AC e BD do paralelogramo $ABCD$. Sendo $\overrightarrow{BM} = (0,-1,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2,2,2)$, calcule a área do paralelogramo $ABCD$ e a distância do ponto M à reta AB.

20. Seja O um ponto. Considere os pontos R, S, T tais que $\overrightarrow{OR} = (12,-7,9)$, $\overrightarrow{OS} = (14,-6,9)$ e $\overrightarrow{OT} = (t+11,t-7,10)$. Determine a menor área possível para o triângulo RST, onde t percorre $I\!R$.

21. Sejam $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{CB} = (0,0,2)$.

    (a) Mostre que o triângulo ABC é retángulo.
    (b) Determine $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}$.
    (c) Calcule o comprimento da altura relativa à hipotenusa do triângulo retángulo ABC.

22. Dados $\vec{a} = (0,1,1)$, $\vec{b} = (0,1,0)$, $\vec{c} = (1,1,0)$, determine o vetor unitário $\vec{u}$ tal que $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{c}$, $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e $\vec{u}\cdot\vec{b} > 0$. Determine os vetores $\vec{v}$ de norma $\sqrt{8}$, sabendo que o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{a}$ é $\frac{\pi}{3}$ radianos e que os vetores $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{v}$ são coplanares.

23. Consideremos os vetores $\vec{x} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (0,3,-4)$, $\vec{u} = (1,0,\sqrt{3})$ e $\vec{a} = (0,0,2)$. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ e a altura relativa à base determinada por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, sabendo-se que $\overrightarrow{AB} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{x}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$, $\overrightarrow{AC}/\!/\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u} < 0$ e $(\mathrm{proj}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB})\wedge\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

24. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$ e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Sendo $\|\,\vec{u}\,\| = 1$, $\|\,\vec{v}\,\| = 1$, $\|\,\vec{w}\,\| = 4$, determine $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$.

25. O objetivo deste exercício é resolver a equação:

$$\vec{x}\wedge\vec{u} = \vec{v}, \qquad (*)$$

    onde $\vec{u}\neq\vec{0}$ e $\vec{v}$ são dados.

    (a) Estudemos a equação homogênea $\vec{x}\wedge\vec{u} = \vec{0}$. Nesse caso dê o conjunto de todas as soluções.
    (b) Mostre que se $\vec{x}_0$ é uma solução de $(*)$, então $\vec{x}$ é uma solução de $(*)$ se e somente se existe $\lambda\in I\!R$ tal que $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{u}$.
    (c) Mostre que se $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$, $(*)$ não tem solução.
    (d) Suponha agora $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Determine $k\in I\!R$ para que $x_0 = k\vec{u}\wedge\vec{v}$ seja solução de $(*)$.

(e) Dê o conjunto de todas as soluções de $(*)$.

26. São dados os pontos $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

    (a) Escreva equações vetorial e paramétrica para a reta determinada pelos pontos B e C, e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta?

    (b) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

    (c) Escreva uma equação paramétrica da mediana relativa ao vértice C do triângulo.

27. Dados os pontos A=(1,2,5) e B=(0,1,0), determine P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento de PB seja o triplo do comprimento de PA.

28. Escreva uma equação paramétrica para a reta r que passa pelo ponto A=(2,0,-3) e:

    (a) é paralela à reta $s : \dfrac{1-x}{5} = \dfrac{3y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$

    (b) é paralela à reta que passa pelos pontos B= (1,0,4) e C=(2,1,3).

29. Escreva equações geral e paramétrica para os planos descritos abaixo:

    (a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

    (b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

    (c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

30. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$

    (a) Mostre que $P \notin r$.

    (b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

31. Decomponha o vetor $\vec{v} = (1, 2, 4)$ em duas parcelas, sendo uma delas paralela ao plano $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1)$ e outra paralela à reta $X = (0, 0, 0) + \nu(2, 1, 0)$.

32. Um paralelogramo de vêrtices A, B, C e D, tem lados AB e CD paralelos à reta de equação $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(3, 4, 5)$, e os outros dois paralelos ao plano $\pi : x + y + 3z = 0$. Sabendo-se que $A = (0, 0, 0)$ e $D = (1, 1, 1)$, determine os vértices B e C.

33. Estude a posição relativa das retas r e s nos casos:

    (a) $r : X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$ $\qquad s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

    (b) $r : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ $\qquad s : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

34. Estude a posição relativa da reta r e do plano π nos casos:

    (a) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$ $\qquad \pi : x - y - z = 2$.

    (b) $\pi : X = (0, 1/2, 0) + \lambda(1, -1/2, 0) + \mu(0, 1, 1)$ $\qquad r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

35. Verifique se os planos π_1 e π_2 são iguais nos casos:

    (a) $\pi_1 : X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(-3, 4, -6)$, $\pi_2 : X = (2, 1, 3) + \lambda(-1, 1, -2) + \mu(-2, 3, -4)$

    (b) $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$, $\qquad \pi_2 : 2x - 6y + 4z + 1 = 0$.

36. Verifique se a reta r está contida no plano π nos casos:

    (a) $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 0)$ e $\pi : x + 2y + 3z = 1$;

(b) $\pi : X = (1,4,1) + \lambda(1,-1,1) + \mu(-1,2,1)$ e r é a reta que passa pelos pontos $A = (2,3,2)$ e $B = (0,0,1)$.

37. Obtenha uma equação vetorial para as retas (caso existam) que passam pelo ponto P, são paralelas ou contidas no plano π e são concorrentes com a reta r nos seguintes casos (interprete geometricamente):

    (a) $P = (1,1,0),\ \pi : 2x + y - z - 3 = 0,\ r : X = (1,0,0) + \lambda(-1,0,1)$;

    (b) $P = (1,0,1),\ \pi : x - 3y - z = 1,\ r : X = (0,0,0) + \lambda(2,1,-1)$;

    (c) $P = (1,2,1),\ \pi : x - y = 0,\ r : X = (1,0,0) + \lambda(2,2,1)$.

38. Dados os pontos A=(0,0,1), B=(1,2,1) e C=(1,0,1), obtenha equações paramétricas das bissetrizes interna e externa do triângulo ABC, relativas ao vértice C.

39. Dê uma equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por

$$A = (1,1,1) \quad \text{e} \quad B = (2,1,-1).$$

40. Obtenha um vetor normal ao plano π nos seguintes casos:

    (a) π passa pelos pontos $A = (1,1,1),\ B = (1,0,1)$ e $C = (1,2,3)$;

    (b) π tem equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

41. Considere os planos $\pi_1 : 2x = y$, $\pi_2 : x = 0$, $\pi_3 : z = 0$ e seja π_4 o plano determinado pelas retas:

$$r : X = (1,2,0) + \lambda(1,2,-1) \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

    Verifique se esses planos determinam um tetraedro e calcule o seu volume.

42. Determine a projeção ortogonal:

    (a) do ponto $P = (4,0,1)$ sobre o plano $\pi : 3x - 4y + 2 = 0$

    (b) da reta $r : x + 1 = y + 2 = 3z - 3$ sobre o plano $\pi : x - y + 2z = 0$

    (c) da origem sobre a reta intersecão dos planos $\pi : x + y + z = 1$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$

43. Ache o vértice B de um triângulo retângulo ABC sabendo que:

    (a) $A = (1,1,1)$ e a cota de C é maior do que a de A;

    (b) a hipotenusa AC é ortogonal ao plano $x + y - z - 10 = 0$, e mede $\sqrt{3}$;

    (c) o lado AB é ortogonal ao plano $2x - y - z = 0$.

44. Um cubo tem diagonal AB e uma de suas faces está contida no plano $\pi : x - y = 0$. Determine seus vértices, dados $A = (1,1,0)$ e $B = (1,3,\sqrt{2})$.

45. Um hexágono regular $ABCDEF$ está contido no plano $\pi : x + y + z - 1 = 0$. Sendo $A = (1,0,0)$ e $D = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dois vértices diametralmente apostos, determine os outros quatro.

46. Considere as retas $r : X = (1,0,1) + \lambda(0,1,2)$ e $s : X = (0,0,1) + \lambda(1,1,1)$. Mostre que r e s sâo retas reversas. Encontre o ponto da reta s mais próximo do ponto $A = (1,0,1)$. Encontre dois pontos $P \in r$ e $Q \in S$ cuja distância seja a menor possível.

47. Decomponha o vetor $\vec{v} = (-3,4,-5)$ numa soma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ onde $\vec{v}_1$ é paralelo ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

    e $\vec{v}_2$ é ortogonal a π.

48. Considere os planos $\pi_1 : 3x - y + z - 4 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z + 2 = 0$.

    (a) Mostre que π_1 e π_2 são concorrentes;
    (b) Ache uma equação vetorial da reta $s = \pi_1 \cap \pi_2$;
    (c) Ache uma equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular a reta s.

49. Considere as retas r e s dadas por: $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1)$ e $s : X = (1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1)$.

    (a) Mostre que r e s são retas reversas;
    (b) Dê uma equação geral para os planos π_1 e π_2 tais que $r \subset \pi_1$, $s \subset \pi_2$ e π_1 é paralelo a π_2.
    (c) Calcule a menor distância possível entre um ponto de r e um ponto de s.

50. Encontre as equações paramétricas para a reta:

    (a) Que passa por $P(-3, 6, 0)$ e é perpendicular à reta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
    (b) Que passa por $P(7, -7, 2)$ e é perpendicular à reta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    (c) De intersecção dos planos $x + 2y - 3z = 0$ e $5x + 3y - 2z = 4$.

51. Encontre a (menor) distância entre as retas não paralelas e os pontos onde ela é atingida.

    (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

52. Encontre a equação para o plano:

    (a) Que passa por $A(3, 1, -1)$ e é perpendicular à reta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.
    (b) Que passa por $P(5, 2, -1)$ e é paralelo ao plano determinado pelos pontos $A(1, 3, -7)$, $B(-1, 2, 0)$ e $C(0, 1, 3)$.
    (c) Que contém $A(3, 0, -2)$ e a reta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
    (d) Que contém as retas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
    (e) Que é equidistante dos pontos $A(1, -3, 7)$ e $B(3, -5, 9)$.

53. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todos os itens, $\vec{d}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representam vetores.

    (a) Se uma reta é paralela a um plano, ela nunca intercepta o plano.
    (b) Quaisquer três planos que não incluam um par de planos paralelos se encontram em um único ponto.
    (c) Se o plano $ax + by + cz = k$ passa pela origem, então $k = 0$.
    (d) Todo plano tem exatamente uma equação da forma $ax + by + cz = k$.
    (e) Se duas retas não se interceptam, elas não estão ambas contidas em um mesmo plano.
    (f) Se uma reta é paralela ao vetor normal de um plano, então ela é paralela ao plano.
    (g) A reta interseção de dois planos (não paralelos) é ortogonal a ambos os vetores normais dos planos.
    (h) Uma reta ortogonal ao vetor normal de um plano tem que ser paralela ao plano.

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de MAT2457
Respostas
Escola Politécnica – $1^{\underline{o}}$ semestre de 2014

1. $\vec{u} = (3, -3, -3)$ ou $\vec{u} = (-3, 3, 3)$; ângulo agudo; $(3, -3, -3)$.
2. a) $\frac{6}{11}(3, -1, 1)$ b) $\frac{5}{9}(-2, 1, 2)$
3. $\vec{w}_1 = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right)$ e $\vec{w}_2 = \left(-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10}\right)$
4. $\vec{w}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$ e $\vec{w}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$
5. (a) falsa, (b) verdadeira, (c) falsa, (d) falsa, (e) verdadeira, (f) verdadeira, (g) falsa, (h) verdadeira, (i) verdadeira, (j) falsa.
6. $(1, -5, 4)$
7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\frac{\sqrt{19}}{2}$
9. $\vec{x} = (1, 1, 1)$
10. $\vec{x} = (-1, 2, 1)$
11. $\vec{x} = (-1, 1, -1)$
14. (a) base negativa. (b) base positiva. (c) base negativa. (d) coplanares. (e) base positiva. (f) coplanares.
15. $abc > 0$.
16. $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$
17. -30
18. $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$
19. área $= 2\sqrt{14}$, distância $= \sqrt{\frac{7}{3}}$
20. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
21. $\text{proj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1)$, altura $= 1$
22. $\vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{v} = (-2, 0, 2)$ ou $\vec{v} = (2, 2, 0)$
23. volume $= \frac{8}{75}$, altura $= \frac{8}{5\sqrt{13}}$
24. 2

25. (a) $\vec{x} = \lambda\vec{u}, \lambda \in I\!R$.

(b) De fato, se $\vec{x}$ é solução de $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$, como $\vec{x}_0 \wedge \vec{u} = \vec{v}$, resulta, por substração, que $(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Logo existe $\lambda \in I\!R$ tal que $\vec{x} - \vec{x}_0 = \lambda\vec{u}$. Reciprocamente, se $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{u}$ é fácil verificar que $\vec{x}$ é solução de $(*)$.

(c) Sabemos que $\vec{x} \wedge \vec{u}$ é sempre perpendicular a $\vec{u}$. Logo se $(*)$ tem solução, $\vec{v}$ deve ser perpendicular a $\vec{u}$, ou seja $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(d) $k = 1/\|\vec{u}\|^2$

(e) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, não tem solução. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, é o conjunto dos $\vec{x}$ da forma

$$\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} + \lambda\vec{u}, \lambda \in I\!R.$$

26. (a) $X = (4, -7, -6) + \lambda(1, -1, -1);\ \lambda \in I\!R$ $\quad D$ não pertence à reta.

(b) basta verificar que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ é L.I.

(c) $\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 4 - 11\lambda \qquad \lambda \in I\!R \\ z = -2 - 4\lambda \end{cases}$

27. $P = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4})$ ou $P = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2})$.

28. $\begin{cases} x = 2 - 15\lambda \\ y = 4\lambda \qquad \lambda \in I\!R \\ z = -3 + 18\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \qquad \lambda \in I\!R. \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

29. (a) $\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = \lambda, \qquad \lambda, \mu \in I\!R \end{cases}$, $x - 2y + 4z + 1 = 0$

(b) $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in I\!R \end{cases}$, $3x - y - 2z - 1 = 0$,

(c) $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 - 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu, \qquad \lambda, \mu \in I\!R \end{cases}$, $3x - y + z - 4 = 0$.

30. (b) $8x + 6y - z - 39 = 0$.

31. $\vec{v} = (11, 7, 4) + (-10, -5, 0)$.

32. $C = \left(\frac{7}{22}, \frac{2}{22}, \frac{-3}{22}\right)$ e $B = \left(\frac{15}{22}, \frac{20}{22}, \frac{25}{22}\right)$.

33. (a) Paralelas distintas, (b) Concorrentes em $P = (1, -1, 0)$.

34 (a) r e π são transversais em $P = (1, 0, -1)$, (b) r está contida em π.

35 (a) Sim, (b) Não.

36 (a) Sim, (b) Não.

37 (a) $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, -3, -1)$, (b) Há infinitas soluções, (c) Não existe solução.

38. Bissetriz interna : $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in I\!\!R$ Bissetriz externa : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in I\!\!R$

39. $x - 2z = 0$.

40. (a) $(1, 0, 0)$, (b) $(1, 2, 1)$

41. Determinam um tetraedro de volume $\frac{1}{6}$.

42. (a) $(\frac{58}{25}, \frac{56}{25}, 1)$, (b) $X = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) + \lambda(8, 10, 1)$, (c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

43. $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

44. $(2, 2, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 1, \sqrt{2})$, $(2, 2, \sqrt{2})$, $(0, 2, \sqrt{2})$.

45. $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

46. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $P = \left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ e $Q = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right)$.

47. $(-3, 4, -5) = (-3, 0, -5) + (0, 4, 0)$.

48. (b) $X = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right) + \lambda(0, 1, 1)$, $\lambda \in I\!\!R$, (c) $X = (1, 0, 1) + \lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, $\lambda \in I\!\!R$.

49. (b) $\pi_1 : x - 2y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x - 2y + z = 0$, (c) $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

50. (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{13}{7} \\ \frac{47}{7} \end{pmatrix}$.

51. (a) $\frac{13}{42}\sqrt{42}$. Pontos $(-\frac{19}{14}, \frac{36}{14}, \frac{11}{14})$, $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$. (b) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$. Pontos $(-\frac{13}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5})$, $(-\frac{13}{5}, 3, -1)$.

52. (a) $4y - z = 5$. (b) $4x + 13y + 3z = 43$. (c) $3y + z = -2$. (d) $-6x + 8y - 3z = 17$. (e) $x - y + z = 14$.

53. (a) Verdadeiro (se a reta não está contida no plano). (b) Falso. (c) Verdadeiro. (d) Falso. (e) Falso. (f) Falso. (g) Verdadeiro. (h) Verdadeiro.