$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de MAT2457
Escola Politécnica – $1^{\underline{o}}$ semestre de 2014

1. Resolva os seguintes sistemas:

$$(a)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 5 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 22 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 &= 2 \\ x_4 + 3x_5 &= 3 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{cases}$$

2. Encontre condições que as constantes b devem satisfazer para que o sistema abaixo seja compatível:

$$(a)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= b \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{cases}$$

3. Usando operações elementares na matriz aumentada dos sistemas lineares abaixo, justifique para quais valores de a os sistemas não têm solução, têm exatamente uma solução e têm infinitas soluções.

$$(a)\ \begin{cases} x + y - az = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ x + (1-a)y - 2z = 2-2a \\ 2x + 3y - (2+a)z = 1 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x + y + az = a+b+1 \\ 2x + 3y + az = 3a+2b+1 \\ x + y + 2az = 2b+2 \end{cases}$$

4. En cada caso, encontre condições sobre os números a, b para que o sistema dado tenha nenhuma solução, uma única solução, ou infinitas soluções. Além disso, resolva o sistema quando for consistente.

(a) $$\begin{aligned} ax + y &= -1 \\ 2x + y &= b \end{aligned}$$ (b) $$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ bx + 2y &= 5 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x + 2y + z &= -1 \\ 3x + 7y + 6z &= -1 \\ 2x + 4y + (a^2+1)z &= b-1 \end{aligned}$$ (d) $$\begin{aligned} ax + + bz &= 2 \\ ax + ay + 4z &= 4 \\ ay + 2z &= b \end{aligned}$$

5. Encontre uma matriz X tal que:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Encontre a matriz C.

$$\left(\left(C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dica: a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é invertível.

7. Determine os valores de a e b que tornam o sistema

$$\begin{cases} 3x - 7y &= a \\ x + y &= b \\ 5x + 3y &= 5a + 2b \\ x + 2y &= a + b - 1 \end{cases}$$

compatível e determinado. Em seguida, resolva o sistema.

8. Considere o sistema linear nas variáveis x, y, z. Ache os valores de a e b para que o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} ax + bz &= 2 \\ ax + ay + 4z &= 4 \\ ay + 2z &= b \end{cases}$$

seja: (a) unitário, (b) vazio, (c) infinito.

9. Seja $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Considere o sistema não-homogêneo $AX = B$ e o sistema homogêneo associado $AX = 0$. Prove ou dê contra-exemplo.

   (a) Se $AX = B$ tem infinitas soluções então $AX = 0$ tem infinitas soluções.

   (b) Se $AX = 0$ tem infinitas soluções então $AX = B$ tem infinitas soluções.

   (c) Se $AX = B$ não tem solução então $AX = 0$ só tem a solução trivial.

   (d) Se $AX = 0$ só tem a solução trivial então $AX = B$ tem solução única.

10. Sejam $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Considere a equação matricial $AX = B$, onde a incógnita é uma matriz de ordem n. Mostre que se essa equação possuir mais do que uma solução então ela terá infinitas soluções.

11. Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e que a sua inversa é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{bmatrix}$.

12. Mostre que as seguintes matrizes são invertíveis e calcule as suas inversas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

13. (a) Sejam $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ com A invertível. Mostre que se $AB = AC$ então $B = C$.

    (b) Existe alguma matriz invertível tal que $A^2 = 0$?

    (c) Dê um exemplo de uma matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = 0$.

14. Ache uma solução não-trivial para o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

e a partir daí obtenha coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 não todos nulos tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

seja nulo, onde $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 1, -2)$, $v_3 = (3, 1, 1)$ e $v_4 = (4, -1, -2)$.

15. Considere a matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ e calcule seu determinante. Em cada caso procure adivinhar quanto será $\det B$.

    (a) B é a matriz obtida a partir de A permutando-se as linhas 2 e 3.
    (b) B é a matriz obtida a partir de A multiplicando-se a linha 2 por $\frac{2}{3}$.
    (c) B é a matriz obtida a partir de A multiplicando-se a linha 3 por 2.
    (d) B é a matriz obtida a partir de A somando-se a linha 2 à linha 3.
    (e) B é a matriz obtida a partir de A somando-se $-\pi$ vezes a linha 1 à linha 2.
    (f) B é a matriz obtida a partir de A transpondo-se A.

16. Calcule os seguintes determinantes. Recomenda-se fazer operações elementares para reduzir as contas.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

17. Encontre $\det A$ se A é uma matriz 3×3 e $\det 7A = 6$. E se A for 4×4?

18. Suponha que $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{smallmatrix}\right) = 8$. Determine $\det \left(\begin{smallmatrix} e+h & 2h & 3b+e \\ f+i & 2i & 3c+f \\ d+g & 2g & 3a+d \end{smallmatrix}\right)$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} d-g & 3g & 2a+d \\ f-i & 3i & 2c+f \\ e-h & 3h & 2b+e \end{smallmatrix}\right)$.

19. Suponha que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = 1$. Calcule $\det \begin{pmatrix} b+q & (x-1)q & 5v+2b \\ c+r & (x-1)r & 5w+2c \\ a+p & (x-1)p & 5u+2a \end{pmatrix}$.

20. Seja $A = \begin{pmatrix} 123456789 & 987654321 \\ 567891234 & 543219876 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz B tal que

$$B^t A = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}.$$

21. Calcule $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Se $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, mostre que $A^2 = -I$. Mostre que não existem matrizes de tamanho 3×3 tais que $A^2 = -I_3$. Mostre que não existem matrizes de tamanho $n \times n$, com n ímpar, tais que $A^2 = -I_n$.

23. Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calcule $\det A$ e verifique que A é invertível quaisquer que sejam os valores de a, b e c.

24. Use operações elementares para mostrar que $\det \left(\begin{smallmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 2a^2-a-1 & 2b^2-b-1 & 2c^2-c-1 \end{smallmatrix}\right) = 0$ e que $\det \left(\begin{smallmatrix} a+2 & b+2 & c+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{smallmatrix}\right) = 0$.

25. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todo o exercício, A, B e C são matrizes quadradas.

    (a) Se $A^2 = I$, então $\det A = 1$.
    (b) Se $A^3 = I$, então $\det A = 1$.
    (c) Se $\det A \neq 0$, e se $AB = AC$ então $B = C$.

(d) $\det(3A) = 3\det A$.

(e) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}BA) = \det B$.

(f) $\det(AB) = \det(BA)$.

(g) Se $\det A = 0$, então A possui duas linhas idênticas.

(h) $\det(-A) = -\det A$.

(i) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(j) Se A é 2×2, $\det(7A) = 49\det A$.

(k) Se $\det A = \det B$, então $A = B$.

(l) Se a diagonal principal de A consiste de zeros, então $\det A = 0$.

(m) Se $\operatorname{adj} A$ existe, então A é invertível.

(n) Se $A^t = -A$, então $\det A = -1$.

(o) Se A é invertível e $\operatorname{adj} A = A^{-1}$, então $\det A = 1$.

(p) Se $\operatorname{adj} A = 0$, então $A = 0$.

26. Sob quais condições vale $\det(-A) = \det A$? E $\det(-A) = -\det A$?

27. Mostre que $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.

28. Mostre que $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$.

29. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ que diferem somente em uma única linha, digamos a linha r. Suponha que a linha r de C pode ser obtida somando os elementos correspondentes na linhas r de A e B. Mostre que $\det C = \det A + \det B$. Mostre que o mesmo resultado vale para colunas.

30. Mostre que $\det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & x+d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4$.

31. Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$, onde $n > 1$. Mostre que $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$. *Dica:* Suponha primeiro que o determinante é não nulo. Então mostre que o resultado ainda é válido quando $\det A = 0$.

32. Seja A uma matriz $n \times n$ invertível. Mostre que A é invertível se, e somente se, $\operatorname{adj} A$ é invertível.

33. O que pode ser dito sobre o valor de $\det A$ onde A é uma matriz $n \times n$ tal que:

$$A^2 = I; \quad A^3 = I; \quad A^2 = 5A; \quad A = -A^t; \quad A^2 + I = 0; \quad A^3 = A; \quad A^{-1} = A^t?$$

34. Suponha que $\det A = -3$, $\det B = 5$, e $\det C = -1$, onde A, B e C são $n \times n$. Calcule:

$$\det(A^3 B^{-2} C^t B^3 A^{-2}); \qquad \det(B^t A^{-1} B^{-1} C A^3 (C^{-1})^t).$$

35. Se A é 4×4 e $\det(3A^{-1}) = 5 = \det(A^2 (B^t)^{-1})$, encontre $\det A$ e $\det B$.

36. Em cada caso, encontre os valores do número c tal que A possui inversa e encontre A^{-1} para tais valores de c.

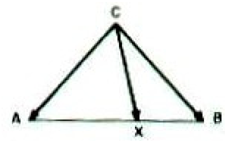
$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 0 & c \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -c & c \\ 1 & 1 & -1 \\ c & -c & 1 \end{pmatrix}$$

37. Determine $\vec{x}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na equação $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$.

38. Resolva o sistema abaixo para as incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u}, \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v}. \end{cases}$$

39. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, $A \neq B$ e $m \neq -1$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e m.



Sugestão: na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ faça aparecer C em ambos os membros.

40. Num triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $\|\overrightarrow{AX}\| = 2\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY são concorrentes.

Sugestão: suponha que $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e deduza uma contradição.

41. Sejam A, B e C pontos de E^3 e sejam $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$ e $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$. Mostre que o vetor $\vec{u} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} + \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ é paralelo à bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$. Interprete geometricamente esse resultado, relacionando-o com uma conhecida propriedade dos losangos.

Sugestão: calcule os cossenos dos ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{c}$ e entre $\vec{u}$ e $\vec{a}$, e compare-os.

42. Determine $\vec{u}$ tal que $\|\,\vec{u}\,\| = 3\sqrt{3}$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{w} = (2, -4, 6)$. Dos $\vec{u}$'s encontrados, qual é o que forma um ângulo agudo com o vetor $(1, 0, 0)$?

43. Determine $\vec{u}$ tal que $\|\,\vec{u}\,\| = \sqrt{2}$, a medida em graus do ângulo entre $\vec{u}$ e $(1, -1, 0)$ seja 45 e $\vec{u} \perp (1, 1, 0)$.

44. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{4}$. Sabendo que $\|\,\vec{u}\,\| = \sqrt{5}$ e $\|\,\vec{v}\,\| = 1$, determine a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

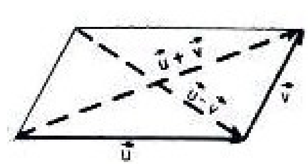
45. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$ sabendo que o tetraedro $ABCD$ é regular e de aresta unitária.

46. Determine a projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do vetor $\vec{v}$ nos casos:

    (a) $\vec{w} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, -1, 1)$;
    (b) $\vec{w} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-2, 1, 2)$.

47. Decomponha $\vec{w} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, sendo $\vec{w}_1$ paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e $\vec{w}_2$ ortogonal a este último.

48. Mostre (usando vetores) que as diagonais de uma paralelogramo têm a mesma medida se e somente se o paralelogramo é um retângulo.



Sugestão: traduza o problema para $\|\,\vec{u} + \vec{v}\,\| = \|\,\vec{u} - \vec{v}\,\| \iff \vec{u} \perp \vec{v}$.

49. Mostre (usando vetores) que:

    (a) as diagonais de um losango são perpendiculares e, reciprocamente, se um paralelogramo tem as diagonais perpendiculares então ele é um losango;
    (b) as diagonais de um losango bissectam os ângulos internos.

50. Sabe-se que $\vec{x}$ é ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{x}$ e $(0, 1, 0)$, tem-se $\cos\theta > 0$. Determine $\vec{x}$.

51. Para cada par de vetores a seguir, determine se o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é agudo, obtuso ou reto.

$$\text{(a) } \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 8 \end{smallmatrix}\right). \quad \text{(b) } \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right). \quad \text{(c) } \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -7 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 2 \end{smallmatrix}\right).$$

$$\text{(d) } \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{smallmatrix}\right). \quad \text{(e) } \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right). \quad \text{(f) } \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

52. Encontre todos os possíveis a, b e c de modo que $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ seja ortogonal a ambos os vetores $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

53. Em cada caso, considere a reta que passa por A e B e a reta que passa por C e D, e determine se essas retas são paralelas, ortogonais ou nenhuma dessas posições relativas. Justifique sua resposta.

(a) $A(3, -1, 2),\ B(-1, 1, 3),\ C(0, 1, 1),\ D(4, -1, 0)$.

(b) $A(-2, 5, 0),\ B(2, 1, 1),\ C(5, 3, -2),\ D(3, 4, -2)$.

(c) $A(-1, 5, 2),\ B(9, 2, -3),\ C(0, 2, -3),\ D(1, 7, -4)$.

54. Em cada caso, calcule a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.

$$\text{(a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

55. Em cada caso, escreva $\vec{v}$ como uma soma $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ com $\vec{v_1}$ paralelo a $\vec{w}$ e $\vec{v_2}$ ortogonal a $\vec{w}$.

$$\text{(a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

56. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Em todos os itens, $\vec{d}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representam vetores.

(a) Se $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$, então ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$.

(b) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais, então $8\vec{v}$ e $-4\vec{w}$ também são ortogonais.

(c) Se $-\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$, então $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.

(d) Se a projeção $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{0}$.

(e) Se $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \vec{0}$, então $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{d}$.

(f) Se $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{d}$, então $proj_{\vec{d}}(\vec{v}) = \vec{v}$.

Questões de escolha múltipla

57. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + w = 0 \\ \alpha x + 2y + z + 2w = \beta \\ x - 2y - z = \gamma \end{cases},$$

com incógnitas x, y, z e w. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

a) se $\alpha \neq 1$ então o sistema possui uma única solução;

b) se $\alpha = 1$ e $\beta + \gamma = 0$ então o sistema possui infinitas soluções;

c) se $\alpha = 2$ e $\beta + \gamma = 1$ então o sistema possui infinitas soluções;

d) para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ o sistema possui infinitas soluções ou não possui solução;

e) se $\alpha = 3$ e $\gamma = 2$ então o sistema possui infinitas soluções.

58. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z + v + 2w = 2 \\ x + y + 3z + v = 4 \\ x + y + z - v - w = -1 \end{cases}.$$

Assinale a alternativa correta:

a) existem $A, B, C \in \mathbb{R}^5$ tais que $A \neq (0, 0, 0, 0, 0)$, B e C não são proporcionais e tais que $\{A + \lambda B + \mu C : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema;

b) existem $A, B \in \mathbb{R}^5$ tais que $\{A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema;

c) o sistema possui uma única solução;

d) o sistema não possui solução;

e) existem $B, C \in \mathbb{R}^5$ tais que $\{\lambda B + \mu C : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema.

59. Considere as seguintes afirmações:

(I) seja A uma matriz $n \times n$. Se para quaisquer $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, o sistema linear:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

possui uma única solução, então é possível obter a matriz identidade fazendo operações elementares de escalonamento sobre as linhas da matriz A;

(II) se P e Q são soluções de um sistema linear então $P + Q$ necessariamente é solução desse sistema;

(III) se P e $2P$ são soluções de um sistema linear então λP necessariamente é solução desse sistema, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assinale a alternativa correta:

a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

c) todas as afirmações são verdadeiras;

d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

60. Sejam $m, n, p \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear

$$\begin{cases} x+y+z=m \\ x+2z=n \\ -2x+y-z=p \\ -x+3y-z=5 \end{cases}.$$

Pode-se, então, afirmar que este sistema tem uma única solução se, e somente se, $2m-n+p$ é igual a

a) $5/2$
b) 5
c) 6
d) $3/2$
e) 10

61. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+ax_2-x_3=2a, \\ 3x_1+2x_2+bx_3=0, \end{cases}$$

com incógnitas x_1, x_2 e x_3. Qual das alternativas contém as condições sobre a e b que tornam esse sistema impossível?

a) $(a-2)(b+3)+1=0$ e $a \neq 1$;
b) $(2-a)(3-b)-3=0$ e $a \neq 4$;
c) $ab-3a-2b+7 \neq 0$;
d) $(a-2)(b+3) \neq 0$ e $ab-3a \neq 0$;
e) $a \neq 1$ e $b=2a$.

62. Assinale o vetor que é uma combinação linear de $\vec{u}=(0,2,-2)$ e $\vec{v}=(1,-3,0)$

a) $(-1,-5,0)$
b) $(0,4,5)$
c) $(2,-6,2)$
d) $(1,-2,2)$
e) $(-1,1,2)$

63. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{3}$. Sabendo que $\|\vec{u}\|=2$ e $\|\vec{v}\|=1$ e que θ é a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, temos que $\cos\theta$ vale:

a) $-\frac{3}{\sqrt{24}}$
b) $-\frac{3}{\sqrt{21}}$
c) $\frac{3}{\sqrt{21}}$
d) $\frac{1}{7}$
e) $\frac{3}{\sqrt{24}}$

Questões de aplicações

1. Neste exercício usamos como referência **o modelo de economia aberta de Leontief**, que pode ser visto em `http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/leonteif.htm`

   Considere uma economia aberta, durante um certo período, com os seguintes setores/atividades: alimentos, eletricidade, indústria básica, tecnologia, serviços. Considere que:

   - para produzir \$ 1 em alimentos são necessários necessários \$ 0,05 em alimentos, \$ 0,10 de eletricidade e \$ 0,3 em serviços.
   - para produzir \$ 1 em eletricidade são necessários \$ 0,35 em eletricidade, \$ 0,1 em indústria básica, \$ 0,1 em tecnologia e \$ 0,15 em serviços.
   - para produzir \$ 1 em indústria básica são necessários \$ 0,1 em alimentos, \$ 0,25 em eletricidade, \$ 0,05 em tecnologia e \$ 0,25 em serviços.
   - para produzir \$ 1 em tecnologia são necessários \$ 0,1 em eletricidade, \$ 0,2 em indústria básica, \$ 0,15 em tecnologia e \$ 0,1 em serviços.
   - para produzir \$ 1 em serviços são necessários \$ 0,1 em alimentos, \$ 0,15 em eletricidade, \$ 0,05 em tecnologia e \$ 0,2 em serviços.

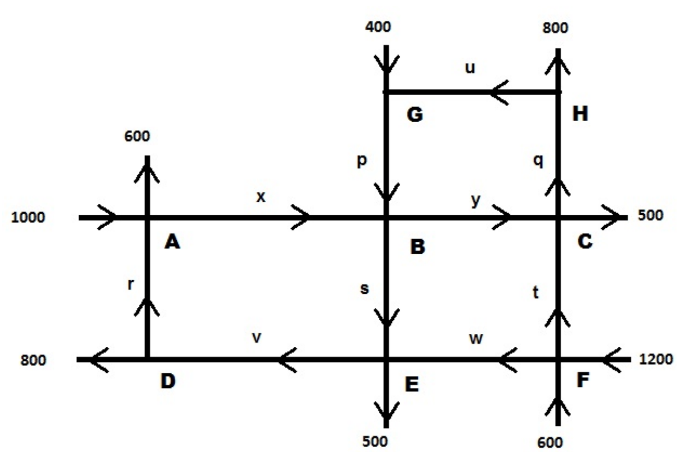
   Ainda, admita que devido aos mercados externos, há as seguintes demandas externas:

   - alimentos: \$ 10.000
   - eletricidade: \$ 25.000
   - indústria básica: \$ 15.000
   - tecnologia: \$ 30.000
   - serviços: \$ 20.000

   Encontre os níveis de produção de cada um dos setores/atividades com base nas informações dadas durante este período, que satisfaça exatamente as demandas internas e externas.

2. Neste exercício usamos como referência o texto sobre **redes** acessível em `http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/networks.htm`. É interessante notar que o argumento do mesmo funciona em qualquer rede que atenda a leis similares às leis de Kirchhoff, havendo preservação do fluxo em cada um dos nós da rede. Desta forma, o mesmo raciocínio serve, como exposto em detalhes na referência citada, em contextos como circuitos elétricos.

   Considere o seguinte diagrama do tráfego em uma região da cidade, onde os números indicam a média de veículos na hora de pico em pontos de monitoração do sistema.



   Determine as demais médias indicadas.

Respostas

1. (a) Incompatível,

   (b) $(1,3,1)$

   (c) $(1,2,0,3,0,0)+r(-1,-1,1,0,0,0)+s(-1,-2,0,-3,1,0)+t(0,-1,0,0,0,1),\ r,s,t\in\mathbb{R}$,

   (d) $(2,2,0)+t(-1,2,1),\quad t\in\mathbb{R}$.

2. (a) $b_1=b_2+b_3$, (b) $b_1=b_3+b_4$ e $b_2=2b_3+b_4$, (c) $b\in\mathbb{R}$, (d) $b=1$.

3. (a) Tem uma única solução quando $a\neq 2$ e $a\neq -1$. Não tem soluções quando $a=-1$. Tem infinitas soluções quando $a=2$.

   (b) Tem infinitas soluções quando $a=0$ e $b=-1$. Não tem soluções quando $a=0$ e $b\neq -1$. Tem uma única solução quando $a\neq 0$.

4. (a) Se $a=2$ e $b\neq -1$, o sistema é inconsistente.

   Se $a=2$ e $b=-1$ o sistema é consistente com infinitas soluções. As soluções são $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

   Se $a\neq 2$, o sistema é consistente com uma única solução. A única solução é $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{b+1}{2-a}\\ \frac{-2-ab}{2-a}\end{pmatrix}$.

   (b) Se $ab\neq 2$ o sistema é consistente com uma única solução.

   Se $ab=2$ e $b=5$ (ou seja $a=\frac{2}{5}$) o sistema é consistente com infinitas soluções.

   Se $ab=2$ e $b\neq 5$ o sistema é inconsistente.

   (c) Se $a=1,-1$ e $b\neq -1$ o sistema é inconsistente.

   Se $a=1,-1$ e $b=-1$ o sistema é consistente com infinitas soluções: $\begin{pmatrix} -5\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 5\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$

   Se $a\neq 1,-1$ o sistema é consistente com uma única solução: $\begin{pmatrix} -5+5\frac{b+1}{a^2-1}\\ 2-3\frac{b+1}{a^2-1}\\ \frac{b+1}{a^2-1}\end{pmatrix}$

   (d) Se $a\neq 0$ e $b=2$ o sistema é consistente com infinitas soluções.

   Se $a\neq 0$ e $b\neq 2$ o sistema é consistente com uma única solução.

   Se $a=0$, e $b=2$ o sistema é consistente com infinitas soluções.

   Se $a=0$ e $b\neq 2$ o sistema é inconsistente.

5. $(a)\quad X=\begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26\\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17\\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35\end{bmatrix}\quad (b)\quad X=\begin{bmatrix} 2+\lambda & -1+\mu & -1+\gamma\\ -2-2\lambda & 1-2\mu & 1-2\gamma\\ \lambda & \mu & \gamma\end{bmatrix}$.

6. $C=\begin{pmatrix} 6 & -14 & 0\\ 3 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

7. $a=2$ e $b=4,\ x=3$ e $y=1$.

8. Tem infinitas soluções se $a = 0$ e $b = 2$ $(\{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\})$, ou se $a \neq 0$ e $b = 2$ $(\{(x, x, 1 - \frac{a}{2}x) : x \in \mathbb{R}\})$.

   Tem uma única solução se $a \neq 0$ e $b \neq 2$.

   Não tem solução se $a = 0$ e $b \neq 2$.

9. (a) verdadeiro, (b) falso, (c) falso, (d) falso

12. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \\ 7 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Uma solução não trivial é: $(11, 1, -15, 8)$; $11v_1 + v_2 - 15v_3 + 8v_4$

15. $\det A = 126$. (a) -126. (b) 84. (c) 252. (d) 126. (e) 126. (f) 126.

16. O determinante da matriz 4×4 é -26. O determinante da matriz 5×5 é -2.

17. $\det A = \frac{6}{7^3}$. $\det A = \frac{6}{7^4}$.

18. O determinante da primeira matriz é 48. O da segunda -48.

19. $5(x - 1)$.

20. $\begin{pmatrix} 543219876 & -567891234 \\ -987654321 & 123456789 \end{pmatrix}$

21. 2 e 2.

23. $\det A = 1 + a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

25. (a) Falsa. (b) Verdadeira. (c) Verdadeira. (d) Falsa. (e) Verdadeira. (f) Verdadeira. (g) Falsa. (h) Falsa. (i) Falsa. (j) Verdadeira. (k) Falsa. (l) Falsa. (m) Falsa. (n) Falsa. (o) Verdadeira. (p) Falsa.

26. n par. n ímpar.

27. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{pmatrix} = (y - x)(z - x) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{pmatrix}$

31. Suponha que A é invertível. Então $\det A \neq 0$. $A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n$. $\det A \det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^n$. $\det(adj A) = (\det A)^{n-1}$.

    Suponha que A não é invertível. Então $\det A = 0$. Se A é zero, $\operatorname{adj} A = 0$ e $\det(adj A) = 0$. Se A não é zero, então $\operatorname{adj} A$ não pode ser invertível, pois $A \operatorname{adj} A = 0$. Portanto $\det(\operatorname{adj} A) = 0$.

    .

32. Segue-se do exercício 31.

33. $\det A = \pm 1$. $\det A = 1$. $\det A = 0$ ou $\det A = 5^{n-1}$. $\det A = 0$ se n ímpar. $\det A = \pm 1$ se n par. Se n é ímpar é impossível ter $A^2 = -I$. $\det A = 0$ ou $\det A = \pm 1$. $\det A = \pm 1$.

34. 15. 9.

35. $\det A = \frac{3^4}{5}$. $\det B = \frac{3^8}{5^3}$.

36. A não possui inversa se $c = 0, 1$ ou -1. A possui inversa quando $c \neq 0, 1, -1$. Nesse caso $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & -c & c^2 \\ -(2-c^2) & 1 & -c \\ -2 & 1+c^2 & -2c \end{pmatrix}$

37. $\vec{x} = -\frac{3}{8}\vec{u} - \frac{5}{4}\vec{v}$

38. $\vec{x} = \frac{5}{7}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{v}$ e $\vec{y} = \frac{1}{7}\vec{u} - \frac{1}{7}\vec{v}$

39. $\overrightarrow{CX} = \frac{m}{1+m}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{1+m}\overrightarrow{CA}$

42. $\vec{u} = (3, -3, -3)$ ou $\vec{u} = (-3, 3, 3)$; ângulo agudo; $(3, -3, -3)$.

43. $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ ou $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

44. $\arccos \frac{4}{\sqrt{26}}$

45. $-\frac{1}{2}$

46. a) $\frac{6}{11}(3, -1, 1)$ b) $\frac{5}{9}(-2, 1, 2)$

47. $\vec{w}_1 = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right)$ e $\vec{w}_2 = \left(-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10}\right)$

50. $\vec{x} = (-1, 1, -1)$

51. (a) Obtuso. (b) Agudo. (c) Reto. (d) Obtuso. (e) Agudo. (f) Reto.

52. Os vetores da forma $t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ onde t é qualquer número real.

53. (a) Paralelas. (b) Nenhuma. (c) Ortogonais.

54. (a) $\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (b) $\frac{3}{13}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

55. (a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (b) $\vec{v}_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix}$.

56. (a) Falso. (b) Verdadeiro. (c) Falso. (d) Falso. (e) Verdadeiro. (f) Verdadeiro.

Respostas para os exercícios de escolha múltipla

Ex.57 a) Ex.58 a) Ex.59 a) Ex.60 b) Ex.61 b) Ex.62 e) Ex.63 c)

Respostas para os exercícios de aplicações

1. $\begin{pmatrix} \text{\$ alimentos} \\ \text{\$ eletricidade} \\ \text{\$ indústria básica} \\ \text{\$ tecnologia} \\ \text{\$ serviços} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.629,3 \\ 65.542,3 \\ 48.781,9 \\ 59.774,7 \\ 44.978,8 \end{pmatrix}$

2. Dados r, t, u, as demais médias são $\begin{pmatrix} p \\ q \\ s \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400+u \\ 800+u \\ -500+r+t \\ 800+r \\ 1800-t \\ 400+r \\ 1300-t+u \end{pmatrix}$