MAT2457 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA I

3ª Lista de Exercícios - 1º semestre de 2014

1. Seja $P_4(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 4 e seja $f : \mathbb{R}^5 \to P_4(\mathbb{R})$ a aplicação bijetora definida por $f((a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3a^3 + a_4x^4$. Se D é o *operador derivação* $\mathcal{D} : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ definido por $\mathcal{D}(p) = p'$, provar que $f^{-1} \circ D \circ f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ é uma transformação matricial e determine sua matriz associada.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Determine uma transformação matricial de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ não nula tal que a imagem de cada coluna da matriz A é 0.

3. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, w) = (-y, x - y, z, -w)$. Mostre que T é uma transformação matricial.

4. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

   (a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ é uma transformação matricial.

   (b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$ é transformação matricial.

   (c) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $T(a_1, \dots, a_n) = a_n$ é transformação matricial.

   (d) Qualquer matriz real 5×6 define uma transformação linear de $\mathbb{R}^6$ em $\mathbb{R}^5$.

5. Prove que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x + 5y, 3x - 7y)$, é uma transformação matricial e encontre a matriz de T.

6. Em cada caso, mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação matricial e encontre a matriz de T.

$$a)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x - y \end{bmatrix} \qquad b)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y \\ 2y + x \end{bmatrix}$$

$$c)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5y + 6x \end{bmatrix} \qquad d)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - x \\ x + y \end{bmatrix}$$

7. Em cada um dos casos abaixo, encontre números reais a, b, c, d de modo que o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$:

   (a) a imagem de cada ponto da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$ é 0;

   (b) para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sua imagem está em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

8. Qual é a matriz, da transformação matricial $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(2, 3) = (2, 3)$ e $T(-3, 2) = (0, 0)$?

9. Em cada caso, suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, use esta informação para determinar $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$ e encontre a matriz de T.

$$a)\quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad b)\quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } T\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad d)\quad T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

10. Dê a matriz de cada uma das transformações e esboce a imagem do quadrado unitário.

a) Reflexão em relação à reta $y = -x$.
b) Reflexão em relação à reta $y = 2x$.
c) Rotação de $\frac{\pi}{4}$.
d) Rotação de $\frac{-\pi}{2}$.
e) Projeção sobre o eixo y.
f) Projeção sobre o eixo $y = -x$.

11. Em cada caso, mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não é uma transformação matricial.

$$a)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

12. Em cada caso, decida se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma projeção sobre uma reta, ou uma reflexão em rela cão a uma reta, ou uma rotação de um ângulo e encontre a reta ou ângulo.

$$a)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix} \qquad b)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-y \\ y-x \end{bmatrix}$$

$$c)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -x-y \\ x-y \end{bmatrix} \qquad d)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3x+4y \\ 4x+3y \end{bmatrix}$$

$$e)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} \qquad f)\quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x+y \end{bmatrix}.$$

13. Denote por L a reta que passa pela origem e tem vetor diretor não nulo $\vec{d} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

a) Mostre que a matriz da projeção sobre L é

$$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}.$$

b) Mostre que a matriz da reflexão em relação a L é

$$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{bmatrix}.$$

14. Seja T a transformação matricial induzida por uma matriz invertível A de tamanho 2×2. Em cada caso, interprete T^{-1} geometricamente e então encontre A^{-1}.

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\quad A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$d)\quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f)\quad A = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}.$$

15. Em cada caso, encontre uma rotação ou reflexão que seja igual à transformação dada.

a) Reflexão em relação eixo y, seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$.
b) Rotação de π, seguida de reflexão em relação ao eixo x.
c) Rotação de $\frac{\pi}{2}$, seguida de reflexão em relação à reta $y = x$.
d) Reflexão em relação ao eixo x, seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$.
e) Reflexão em relação à reta $y = x$, seguida de uma reflexão em relação ao eixo x.

16. Expresse a reflexão R em relação à reta $y = -x$ como a composta de uma rotação T, seguida de uma reflexão S em relação à reta y=x. [Sugestão: Se $R = S \circ T$, então $T = S^{-1} \circ R$.]

17. Determine o efeito das seguintes transformações:

    a) Rotação de $\frac{\pi}{2}$, seguida de uma projeção sobre o eixo y, seguida de uma reflexão em relação à reta $y = x$.

    b) Reflexão em relação à reta $y = x$, seguida de reflexão em relação à reta $y = -x$.

    c) Projeção sobre o eixo x, seguida de uma reflexão em relação à reta $y = x$.

    d) Expansão pelo fator 2 em y, seguida de rotação de $\frac{\pi}{2}$.

18. Dadas duas retas perpendiculares $y = m_1 x$ e $y = m_2 x$, mostre que as projeções correspondentes P_1 e P_2 satisfazem $P_1 \circ P_2 = 0$.

19. Esboce a imagem do quadrado unitário pela multiplicação de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine sua área.

20. Denote por área$(\vec{v}, \vec{w})$ a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}e$ e $\vec{w}$. Mostre que

$$\text{área}(A\vec{v}, A\vec{w}) = |\det(A)||\det[v, w]|,$$

    onde $[v, w]$ denota a matriz de colunas $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

21. Encontre um conjunto de soluções básicas do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - s + 2t = 0 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0. \end{cases}$$

22. Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e calcule uma matriz B tal que $B^2 = A$; B é chamada de uma *raiz quadrada* de A; quantas raízes quadradas de A há?

23. Para cada matriz encontre todos os auto-valores e os auto-vetores:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

24. Provar que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

    é diagonalizável e achar P e Q invertíveis é D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$ e $A = QDQ^{-1}$. Qual é a relação entre as matrizes P e Q.

25. Para que valores de t a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ t & 1 \end{bmatrix}$ possui um autovalor de multiplicidade 2.

26. Encontrar os valores e vetores próprios reais das seguintes matrizes:

$$a) \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, b) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}, c) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, d) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, e) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

27. Se as matrizes do exercício precedente representam transformações matriciais $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, represente as retas que se transformam em si próprias por aplicação de T.

28. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ linear com matriz canônica $A\in M_2(\mathbb{R})$. Prove que T é uma isometria se e somente se A é *ortogonal*, isto é $A^{-1}=A^t$.

29. Mostre que a composta de duas isometrias é uma isometria.

30. Encontrar os valores próprios e os vetores próprios reais para as seguintes matrizes:

$$a)\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix},\ b)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1\\ -6 & -2 & 0\\ 19 & 5 & -4\end{bmatrix},\ c)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ -4 & 13 & -1\end{bmatrix}.$$

31. Seja $p(x)$ é o polinômio característico de $A=\begin{bmatrix} -7 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Verificar que $p(A)=0$.

32. Encontrar os valores próprios e conjuntos de vetores básicos para cada autovalor da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

33. As matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

são diagonalizáveis?

34. Calcule A^{20} para $A=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

35. Seja $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Calcule A^{2014}.

36. Ache todos os valores λ para que a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$ seja diagonalizável.

37. Determine se a matriz A é diagonalizável e, se for, achar uma matriz P invertível e uma matriz D diagonal tal quer $A=PDP^{-1}$:

$$a)\quad A=\begin{bmatrix} 5 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix},\quad b)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad c)\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

38. Resolva a relação de recorrência $x_0=0, x_1=1$ e $x_n=4x_{n-1}-3x_{n-2}$, para $n\geq 2$.

39. Para cada autovalor λ de cada uma das matrizes abaixo determine sua multiplicidade e o número de autovetores básicos associados a λ

$$A=\begin{bmatrix} -7 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix} 6 & -5 & -10\\ 0 & 6 & 5\\ 0 & -5 & -4\end{bmatrix}.$$

São diagonalizáveis?

40. Achar uma matriz ortogonal P que diagonaliza a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Falamos que uma matriz quadrada P de ordem n é ortogonal se $P \cdot P^t = I_n$, isto é sua inversa coincide com sua transposta.

41. Achar um família de três autovetores para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ que sejam ortogonais dois a dois.

42. Exiba uma matriz A não diagonalizável tal que a matriz A^2 seja diagonalizável.

43. Decida se as matrizes A e B são semelhantes ou não:

    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

    (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$

    (c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$

    (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

    (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

44. Determine se as seguintes matrizes são diagonalizáveis.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

45. Verdadeiro ou Falso? Se uma matriz triangular A é semelhante a uma matriz diagonal, então A já é diagonal.

46. Verdadeiro ou Falso? (a) Se os únicos autovalores de uma matriz diagonalizável A são 0 e 1, então $A^2 = A$.
    (b) Se 2 é um autovalor de uma matriz quadrada A de ordem n, então -1 é um autovalor de $A^2 - 3A + I_n$.

47. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação matricial que satisfaz $T(1,0,1) = (2,1,1)$, $T(1,1,0) = (-1,-1,0)$ e $T(1,1,1) = (2,1,1)$. Determinar a matriz 3×3 associada à transformação T. Considere as seguintes afirmações:

    (I) A não é simétrica, mas é diagonalizável;

    (II) A é simétrica;

    (III) A não é diagonalizável.

    Assinale a alternativa correta:

    (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
    (b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(d) todas as afirmações são falsas;

(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

48. Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

49. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

50. Em cada caso, encontre todas as soluções do sistema de equações diferenciais e encontre uma solução particular que satisfaça as condições dadas.

(a) $\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

(b) $\begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = -1.$

(c) $\begin{cases} x' = 4y + 4z \\ y' = x + y - 2z \\ z' = -x + y + 4z \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 1.$

(d) $\begin{cases} x' = 2x + y + 2z \\ y' = 2x + 2y - 2z \\ z' = 3x + y + z \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 1.$

51. Encontre um sistema linear de três equações diferenciais de primeira ordem que seja equivalente à equação ordinária de ordem três $f''' - af'' - bf' - cf = 0$.

52. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 243) Consideremos dois tanques: o tanque A contem inicialmente 100 l de água e 15 kg de sal; o tanque B contem inicialmente 100 l de água e 5 kg de sal. Um mecanismo permite a vazão do tanque A para o tanque B e vice-versa; a velocidade de vazão é constante e igual a 5 l/min. Suponhamos que, em cada instante t, as soluções nos tanques A e B estejam perfeitamente homogeneizadas, a quantidade de sal no tanque A é $x(t)$ e no tanque B é $y(t)$.

(a) Mostre que $x(t)$ e $y(t)$ são soluções do sistema $\begin{cases} x' = -0,05x + 0,05y \\ y' = 0,05x - 0,05y \end{cases}$ $x(0) = 15,\ y(0) = 5.$

(b) Determine a solução deste sistema.

(c) Após quantos minutos haverá 13 kg de sal no tanque A?

[Observação: o item (a) desta questão não será cobrado na terceira prova.]

53. Ache a solução geral do sistema $X'(t) = AX(t)$, em que:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -14 & 6 & 12 \\ -14 & 4 & 14 \\ -11 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

54. Ache a solução dos seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$ $\quad x(0) = 2,\ y(0) = 11.$

(b) $\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = -3,\ z(0) = -2.$

55. (M. Barone Jr, Álgebra Linear, p. 255) Consideremos o *sistema não-homogêneo*

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine uma solução particular do sistema (*) da forma $X_0(t) = (a, b)$, em que a e b são números reais.

(b) Determine a solução geral $Z(t)$ do *sistema homogêneo associado*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(c) Verifique que a solução geral do sistema (*) é dada por $X(t) = X_0(t) + Z(t)$.

(d) Encontre a solução particular do sistema (*) que verifica as condições iniciais

$$x(0) = 37, \quad y(0) = \frac{41}{3}.$$

MAT2457 – ÁLGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIA I

$1^{\underline{o}}$ semestre de 2014

Respostas da $3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. A resposta não é única. A aplicação é da forma $T(x, y, y) = a(x + y - z)$, com a um número real não nulo.

3. Temos que $T(X) = AX$, sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. (a) Falsa (b) Falsa
   (c) Verdadeira (d) Verdadeira

5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

6. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. (a) A resposta não é única. Temos $a = -3b$ e $c = -3d$. Considere, por exemplo, $a = c = 3$ e $b = d = -1$.

   (b) A resposta não é única. Temos $c = 2a$ e $d = 2b$. Considere, por exemplo, $a = b = 1$ e $c = d = 2$.

8. $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$.

9. a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

10. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. a) Projeção na reta $[(1, 2)]$,
    b) Projeção na reta $[(1, -1)]$,
    c) Rotação de ângulo $3\pi/4$,
    d) Reflexão ao redor da reta $[(1, 2)]$,
    e) Reflexão ao redor da reta $[(1, -1)]$,
    f) Rotação de ângulo $\pi/3$.

14. a) T^{-1} é uma compressão em x, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

    b) T^{-1} é um cisalhamento negativo em x, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

    c) $T^{-1} = T$ é uma reflexão ao redor da reta $y = 2x$, $A^{-1} = A$,

d) T^{-1} é uma rotação de ângulo $-\pi/4$, assim $A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
e) T^{-1} é uma reflexão ao redor da reta $[(1, -1)]$, logo $A^{-1} = A$,
f) T^{-1} é uma reflexão ao redor da reta $[(1, m)]$, logo $A^{-1} = A$.

15. a) Reflexão ao redor da reta $y = -x$,
b) Reflexão ao redor do eixo y,
c) Reflexão ao redor do eixo x,
d) Reflexão ao redor da reta $y = x$,
e) Rotação de ângulo $-\pi/2$.

16. Rotação de ângulo π.

17. a) Projeção sobre o eixo x,
b) Rotação de ângulo π,
c) Transformação matricial com matriz associada $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
d) Transformação matricial com matriz associada $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. 3.

21. Um conjunto de soluções básicas é $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (5, 0, -2, 1, 0)\}$.

22. Temos 4 matrizes. Uma raiz quadrada é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

23. a) Autovalores 1 e 4. Autovetores associado ao autovalor 1, $\{\lambda(2, -1) : \lambda \neq 0\}$.
Autovetores associado ao autovalor 4, $\{\lambda(1, 1) : \lambda \neq 0\}$.

b) Autovalores 2 é 6. Os autovetores associados à autovalor 2 são

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\}.$$

Os autovalores associados à autovalor 6 são $\{\lambda(1, 2, 1) \,:\, \lambda \neq 0\}$.

24. A solução não é única. $Q = P^{-1}$. Uma solução é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

25. Para $t = 0$.

26. a) Autovalores $4 \pm \sqrt{13}$, autovetores $\{\lambda(1, 4 \pm \sqrt{13}) \,:\, \lambda \neq 0\}$;
b) Autovalores $\frac{1}{2}(13 \pm \sqrt{105})$, autovetores $\{\lambda(4, 5 \pm \sqrt{105}) \,:\, \lambda \neq 0\}$;
c) Vetores próprios 3 e 4, autovetores $\{\lambda(0, 1) \,:\, \lambda \neq 0\} \cup \{\lambda(1, 0) \,:\, \lambda \neq 0\}$;
d) Autovalores $4 \pm \sqrt{13}$, autovetores $\{\lambda(2, 3 \pm \sqrt{13}) \,:\, \lambda \neq 0\}$;
e) Um único valor próprio 0, cada vetor não nulo é um autovetor;
f) Valores proprios 1 e -1, autovetores $\{\lambda(1, 1) \,:\, \lambda \neq 0\} \cup \{\lambda(1, -1) \,:\, \lambda \neq 0\}$.

27. a) Retas $[(1, 4 + \sqrt{13})]$ e $[(1, 4 - \sqrt{13})]$;
b) Retas $[(4, 5 + \sqrt{105})]$ e $[(4, 5 - \sqrt{105})]$;
c) Retas $[(0, 1)]$ e $[(1, 0)]$;
d) Retas $[(2, 3 + \sqrt{13})]$ e $[(2, 3 - \sqrt{13})]$;
e) Todas as retas que passam pela origem;
f) Retas $[(1, 1)]$ e $[(1, -1)]$.

30. (a) Autovalores 1,2 e 3, $V(1) = [(0,1,0)]$, $V(2) = [(1,-2,-2)]$ e $V(3) = [1,-1,-1)]$;
(b) Autovalor -8, $V(-8) = [(1,1,-6)]$;
(c) Autovalor 2, $V(2) = [(1,1,3)]$.

32. Autovalores -1,-2 e 1 (multiplicidade 2), um conjunto básico de $V(1)$ é $\{(0,0,0,1),(2,3,1,0),\}$, um conjunto básico de $V(-1)$ é $\{(-2,1,1,0)\}$ e um conjunto básico de $V(-2)$ é $\{(1,0,-1,0)\}$.

33. A não é diagonalizável e B é diagonalizável.

34. $A^{20} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{20}+2 & 2^{20}-1 \\ 2^{21}-2 & 2^{21}+1 \end{pmatrix}$.

35. $A^{2014} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{2014}+2 & 5^{2014}-1 \\ 2(5^{2014}-1) & 2\cdot 5^{2014}+1 \end{pmatrix}$.

36. $\lambda \neq -2$.

37. (a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; (b) e (c) não são diagonalizáveis.

38. $x_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

39. (a) Os autovalores 0 e -7 têm multiplicidade 1, o número de autovetores básicos associados a 0 é igual ao número de autovetores básicos associado a 7 que é igual a 1. O autovalor 8 tem multiplicidade 2 e o número de autovetores básicos associados ao autovalor 8 é 1.
(b) O autovalor -4 tem multiplicidade 3, o número de autovetores básicos associados ao autovalor -4 é 2. O autovalor 2 tem multiplicidade 1 e o número de autovetores básicos associados a 2 é 1.
(c) O autovalor 6 tem multiplicidade 1, o número de autovetores básicos associados a 6 é 1. O autovalor 1 tem multiplicidade 2, o número de autovetores básicos associados a 1 é 1.
As matrizes A, B e C não são diagonalizáveis.

40. A solução não é única. Um exemplo é $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

41. A solução não é única. Um exemplo é $\{(1,-1,0),(1,1,1),(1,1,-2)\}$.

42. Por exemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

43. a) Sim. b) Não. c) Não. d) Não. e) Não.

44. As matrizes não são diagonalizáveis.

45. Falso.

46. (a) e (b) verdadeiras.

47. (e).

48. Não é diagonalizável nos reais.

49. (a) É diagonalizável; (b) Não é diagonalizável em $M_4(\mathbb{R})$; (c) Não é diagonalizável em $M_4(\mathbb{R})$.

50. a) A solução geral é $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-t}$.

Se $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$, então $c_1 = \frac{4}{7}$, $c_2 = \frac{-1}{7}$.

b) A solução geral é $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$.

Se $x(0) = 1$ e $y(0) = -1$, então $c_1 = \frac{-2}{3}, \quad c_2 = \frac{1}{3}$.

c) A solução geral é $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$.

Se $x(0) = y(0 = z(0) = 1$, então $c_1 = -1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 0$.

d) A solução geral é $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$.

Se $x(0) = y(0 = z(0) = 1$, então $c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{2}$.

51. $\begin{cases} x' = y + ax \\ y' = z + bx \\ z' = cx, \end{cases}$ com $x = f$, $y = f' - af$, $z = f'' - af' - bf$.

52. (b) $\begin{cases} x(t) = 10 + 5e^{-0,1t} \\ y(t) = 10 - 5e^{-0,1t} \end{cases}$ (c) Aproximadamente 5 minutos.

53. (a) $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde $\begin{cases} x(t) = C_1\ e^{-t} + C_3\ e^{5t} \\ y(t) = C_2\ e^{-t} + C_3\ e^{5t} \\ z(t) = -3\ C_1\ e^{-t} - C_2\ e^{-t} + 2\ C_3\ e^{5t} \end{cases}$ $(C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$

(b) $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde $\begin{cases} x(t) = C_1\ e^{-2t} + C_3\ e^{4t} \\ y(t) = -2C_2\ e^{-3t} + C_3\ e^{4t} \\ z(t) = C_1\ e^{-2t} + C_2\ e^{-3t} + C_3\ e^{4t} \end{cases}$ $(C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$

54. (a) $\begin{cases} x(t) = 14\ e^{t} - 12\ e^{-2t} \\ y(t) = 14\ e^{t} - 3\ e^{-2t} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x(t) = 2\ e^{t} -\ e^{2t} \\ y(t) = -2\ e^{t} - e^{2t} \\ z(t) = -2\ e^{t} \end{cases}$

55. (a) $X_0(t) = \left(25, \dfrac{50}{3}\right)$ (b) $Z(t) = C_1\ e^{-0,02t}(1,1) + C_2\ e^{-0,12t}(-3,2)$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

(d) $\begin{cases} x(t) = 3\ e^{-0,02t} + 9\ e^{-0,12t} + 25 \\ y(t) = 3\ e^{-0,02t} - 6\ e^{-0,12t} + \dfrac{50}{3} \end{cases}$