MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

$2^{o.}$ Semestre de 2013 - $3^{a.}$ Lista de exercícios

Parte A: Equações Diferenciais de 1^a Ordem

1) Os gráficos de duas soluções de $y' = x + y^2$ podem se cruzar num ponto (x_0, y_0)?

2) Dê as soluções das equações diferenciais de 1a. ordem abaixo, com seus domínios (máximos):
a) $y' = y^2$ b) $xy' = y$ c) $yy' = x$
d) $y' = (1-y)(2-y)$ e) $(x+3y) - x\frac{dy}{dx} = 0$ f) $y' = 2y + e^x$

3) Determine a solução de cada um dos problemas de Cauchy:
a) $y' = x + y$, $y(0) = 1$ b) $(\cos t)x' - (\sin t)x = 1$, $x(2\pi) = \pi$ c) $y' = x(1+y)$, $y(0) = -1$

4) Dê duas soluções para cada uma das equações com a condição inicial dada:
a) $y' = 5y^{4/5}$, $y(0) = 0$ b) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}(3x^2+1)$, $y(0) = 0$.

5) Resolva as equações:
a) $y' = e^{x-2y}$
b) $x^2y^2\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$
c) $y' \operatorname{sen} x + y\cos x = 1$
d) $y' = x^3 - 2xy$
e) $\left(3x^2\operatorname{tg}y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right) + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$
f) $(1-xy) + (xy - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$
g) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$
h) $(1+t^2)y' + ty + (1+t^2)^{5/2} = 0$
i) $\dfrac{dr}{d\theta} = \sec^2\theta\sec^3 r$
j) $3t^2x' = 2x(x-3)$
k) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \cos^2(\dfrac{y}{x})$
l) $(1-xy)y' = y^2$
m) $xy' = \sqrt{x^2+y^2}$, $x > 0$

6) Resolva as equações:
a) $(x+y)dx + xdy = 0$
b) $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$
c) $\cos xdy = (1 - y - \operatorname{sen} x)dx$
d) $y(x^2+y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$
e) $e^x \operatorname{sen} ydx + e^x\cos ydy = y\operatorname{sen}(xy)dx + x\operatorname{sen}(xy)dy$

Determine as soluções dos exercícios a), b) e d) que passam pelo ponto (1,1).

7) Mostre que a substituição $z = ax+by+c$ transforma a equação $y' = f(ax+by+c)$ numa equação de variáveis separáveis. Aplique esse método para resolver as equações
a) $y' = (x+y)^2$ b) $y' = \operatorname{sen}^2(x-y+1)$ c) $(x+2y-1)dx + 3(x+2y)dy = 0$.

8) Uma *Equação de Bernoulli* é uma equação não linear de 1a. ordem da forma

(B) $$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

onde n é uma constante real. Se $n = 1$, (B) é uma equação linear. Se $n \neq 1$, mostre que a mudança $z = y^{-n+1}$ transforma (B) na equação linear
$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Use esse método para resolver as seguintes equações:
a) $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$
b) $y' = y + e^{-3x}y^4$
c) $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$ (que também é homogênea!)
d) $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$

9) a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial $y^2\operatorname{sen} xdx + yf(x)dy = 0$.
b) A equação $g(x)dy + (y+x)dx = 0$ tem $h(x) = x$ como fator integrante. Determine todas as possíveis funções g.
c) A equação $e^x\sec y - \operatorname{tg}y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $f(x,y) = e^{ax}\cos y$. Determine a e resolva a equação.
d) Ache um fator integrante da forma $h(x,y) = x^ny^m$ para a equação $y(y^2+1)dx + x(y^2-1)\ln xdy = 0$ e resolva-a.
e) Ache um fator integrante da forma $\mu = \mu(x+y^2)$ para a equação $(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0$.
f) Ache um fator integrante da forma $\mu = \mu(x^2+y^2)$ para a equação $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$.

10) Determine uma função $y = f(x)$ definida num intervalo I cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 5/4)$ e tal que, para todo $t > 0$, $t \in I$, o comprimento do gráfico de $y = f(x)$, $0 \leq x \leq t$, seja igual à área do conjunto $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq t$.

11) Determine uma função $y = f(x)$ cujo gráfico passe pelo ponto (1,1) e tal que, para todo p em seu domínio, a área do triângulo com vértices $(p,0)$, $(p, f(p))$ e M seja 1, onde M é o ponto de intersecção da reta tangente ao gráfico em $(p, f(p))$ com o eixo x.

12) Ache as trajetórias ortogonais às famílias de curvas:
a) $x^2 + y^2 = c$ b) $2x^2 + 3y^2 = c$ c) $y = cx^2$ d) $y = ce^x$.

RESPOSTAS - Parte A

2) a) $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \frac{1}{a-x}$, $x < a$ ou $x > a$, onde $a \in \mathbb{R}$. b) $y = ax$, $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$.
c) $y = \sqrt{x^2+k}$ e $y = -\sqrt{x^2+k}$, $x^2 > -k$ se $k < 0$, $x \in \mathbb{R}$ se $k > 0$ e $x < 0$ ou $x > 0$ se $k = 0$.
d) $y \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, $y \equiv 2$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \frac{ke^x-2}{ke^x-1}$, $x \in \mathbb{R}$ se $k \leq 0$ e $x < -\ln k$ ou $x > -\ln k$ se $k > 0$.
e) $y = ax^3 - \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. f) $y = ae^{2x} - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

3) a) $y = 2e^x - x - 1$, b) $x = \frac{t-\pi}{\cos t}$, c) $y \equiv -1$.

4) a) $y \equiv 0$ e $y = x^5$ b) $y \equiv 0$ e $y = (x^3+x)^3$.

5)

a) $y = \frac{1}{2}\ln(2e^x + C)$, $C \in \mathbb{R}$
b) $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}}$, $C \in \mathbb{R}$
c) $y = \frac{x+C}{\operatorname{sen} x}$, $C \in \mathbb{R}$
d) $y = \frac{1}{2}(x^2-1) + Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$
e) $x^3\mathrm{tg}y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C$, $C \in \mathbb{R}$
f) $y^2 - 2xy + \ln\, x^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$
g) $\begin{cases} y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2 \text{ para } x > 0 \\ y - \sqrt{x^2+y^2} = -C \text{ para } x < 0 \end{cases}$
h) $y = \frac{C-15t-10t^3-3t^5}{15\sqrt{1+t^2}}$, $C \in \mathbb{R}$
i) $3\operatorname{sen} r - \operatorname{sen}^3 r = 3\mathrm{tg}\theta + C$, $C \in \mathbb{R}$
j) $x \equiv 0$, $x \equiv 3$ e $x = \frac{3}{1-Ce^{-2/t}}$, $C \in \mathbb{R}$
k) $\mathrm{tg}(\frac{y}{x}) = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$
l) $xy - \ln|y| = C$, $C \in \mathbb{R}$
m) $\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} + \ln|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}| = C$, $C \in \mathbb{R}$

6) a) $x^2 + 2xy = C$, $C \in \mathbb{R}$ b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2x^2y = C$, $C \in \mathbb{R}$ c) $y = \frac{x+C}{\sec x + \mathrm{tg} x}$, $C \in \mathbb{R}$
d) $y^3(x^2-y^2) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ e) $e^x \operatorname{sen} y + \cos(xy) = C$, $C \in \mathbb{R}$

7) a) $y = \mathrm{tg}(x+C) - x$, $C \in \mathbb{R}$ b) $\mathrm{tg}(x-y+1) = x + C$, $C \in \mathbb{R}$ c) $y - \ln|x+2y+2| + \frac{x}{3} = C$, $C \in \mathbb{R}$.

8) a) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{1}{6x+Cxe^{-x}}$, $C \in \mathbb{R}$ b) $y \equiv 0$ e $y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}}$, $C \in \mathbb{R}$ c) $y \equiv 0$ e $y^2 = \frac{x^3}{C-x}$, $C \in \mathbb{R}$
d) $y \equiv 0$ e $y = \frac{27x^6}{(C-\ln\, x^2)^3}$, $C \in \mathbb{R}$.

9) a) $f(x) = C - 2\cos x$, $C \in \mathbb{R}$ b) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$ c) $a = -1$; $x + e^{-x}\operatorname{sen} y = C$, $C \in \mathbb{R}$
d) $n = -1$; $m = -2$; $(y^2+1)\ln x = Cy$, $C \in \mathbb{R}$ e $y \equiv 0$ e) $\mu(x+y^2) = x + y^2$ f) $\mu = (x^2+y^2)^{-3/2}$.

10) $y = \frac{e^{-x}+4e^x}{4}$. 11) $y = \frac{2}{x+1}$ ou $y = \frac{2}{3-x}$.

Parte B: Equações Diferenciais de Ordem Superior

(1) REDUÇÃO DE ORDEM: Alguns tipos especiais de equações de segunda ordem podem, após uma mudança de variável, ser reduzidas a uma de primeira ordem e assim resolvidas pelos métodos conhecidos.

CASO 1. *Variável Dependente Ausente*: Se na equação y não estiver presente, fazemos a mudança $z = y'$ e assim obtemos uma equação de 1a. ordem.

Exemplo: Considere a equação $xy'' - y' = 3x^2$. Se $z = y'$, então temos a equação $xz' - z = 3x^2$.

(a) Resolva por esse método as equações:
(1) $xy'' - y' = 3x^2$ (2) $xy'' = y' + (y')^3$ (3) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$ (4) $x^2y'' + xy' = 1$.

CASO 2. *Variável Independente Ausente*: Se a variável x não estiver presente explicitamente na equação, introduzimos uma nova variável dependente u, fazendo $u = y' = \frac{dy}{dx}$, e temos então que $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}.\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$ e, fazendo a substituição, a equação se transforma em duas equações de 1a. ordem.

Exemplo: Para a equação $y'' + y = 0$ obtemos $u\frac{du}{dy} + y = 0$ e $u = \frac{dy}{dx}$.

(b) Resolva por esse método as seguintes equações:
(1) $y'' + 4y = 0$ (2) $y'' - 9y = 0$ (3) $yy'' + (y')^2 = 0$ (4) $yy'' = y^2y' + (y')^2$.

(c) Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais:
(1) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0$; $y'(1) = 0$; $y(1) = 1$.
O que acontece com a solução com condições iniciais $y'(0) = 0, y(0) = 1$?
(2) $yy'' = y^2y' + (y')^2$; $y(0) = -\frac{1}{2}$; $y'(0) = 1$.

(2) Em cada um dos itens abaixo, verifique que a função y_1 dada é uma solução da equação dada e encontre, a partir de y_1, outra solução y_2 da mesma equação, de forma que o conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ seja linearmente independente. Mostre que o conjunto obtido é linearmente independente:

(1) $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \qquad y_1 = x^2;$

(2) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \qquad y_1 = x;$

(3) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0, \qquad y_1 = x;$

(4) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \qquad y_1 = x;$

(5) $xy'' + 3y' = 0, \qquad y_1 = 1;$

(6) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \qquad y_1 = x^{-\frac{1}{2}};$

(7) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0, \qquad y_1 = e^x.$

(3) Determine a solução geral das equações:
(1) $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$ (2) $y'' - f(x)y' + (f(x)-1)y = 0.$

(5) Determine todas as soluções das equações:
(1) $y'' + 2y' + y = 0$ (2) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (3) $y''' - y'' + y' - y = 0$
(4) $2y'' - 4y' + 8y = 0$ (5) $y'' - 9y' + 20y = 0$ (6) $2y'' + 2y' + 3y = 0$
(7) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ (8) $\frac{d^4y}{dx^4} + y = 0$ (9) $\frac{d^5y}{dx^5} + 2\frac{d^3y}{dx^5} + \frac{dy}{dx} = 0.$

(6) Uma equação linear da forma $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$, onde α e β são constantes reais, é chamada *equação de Euler* de segunda ordem. Mostre que a mudança de variável $x = e^z$ se $x > 0$ (e $x = -e^z$ se $x < 0$) transforma a equação de Euler em uma equação linear de coeficientes constantes. Aplique esta técnica para determinar a solução geral das equações:
(1) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ (3) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
(4) $2x^2y'' + 10xy' + 3y = 0$ (5) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

(7) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$ e de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$ respectivamente, mostre que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é solução de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$ (Princípio de Superposição). Use este fato para resolver:
(1) $y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$ (2) $y'' + y' - 6y = sen\ x + xe^{2x}$ (3) $y'' + 2y' = 1 + x^2 + e^{-2x}$
(4) $y'' + y' - 2y = 6e^{-x} + 4$ (5) $y'' + y = \cos x + 8x^2$

(8) Resolva.
a) $xy'' - y' = 3x^2$ b) $x^2y'' + xy' - y = x^2$ c) $y''' + y' = \sec x.$

(9) Determine a solução geral das seguintes equações:
(1) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$ (2) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$
(3) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x$ (4) $y'' - 2y' = 12x - 10$
(5) $y'' + y = 2\cos x$ (6) $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$
(7) $(x^2+x)y'' + (2-x^2)y - (2+x)y = x(x+1)^2$ (8) $y'' + 4y = 3\,\text{sen}\,x$
(9) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$ (10) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$
(11) $y'' + y' - 2y = 8\,\text{sen}\ x$ (12) $y'' - 3y' = x + \cos x$
(13) $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = x^3$ (14) $y''' - y = x^3 - 1$
(15) $y'' - 2y = 2e^x(\cos x - \text{sen}\,x)$

(10) Ache a solução geral da equação diferencial dada, em série de potências centradas em 0.
(1) $y'' - xy' - y = 0$ (2) $y'' - x^2y = 0$ (3) $y'' + 2xy' + 4y = 0$

(11) (i) Uma equação diferencial da forma $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, onde p é um numero real fixado, é chamada *equação de Bessel* de ordem p.

(a) Se $p = 0$, mostre que $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ e $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)x^{2n}$ são soluções LI da equação de Bessel.

(b) Se $p = 1$ mostre que $y = x\left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2!3!} - \frac{x^6}{2^6 2!3!4!} + ...\right)$ é solução.

(ii) A equação diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é chamada *equação de Legendre*. Mostre que

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)...(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}$$

e

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

são soluções independentes da equação de Legendre, no intervalo $|x| < 1$.

(12) Discutir o comportamento das soluções das equações seguintes, e sua interpretação física:

a) Equação homogênea de mola:

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = 0, \quad (\mu \geq 0).$$

b) Equação da mola com segundo membro periódico, sem atrito

$$x'' + \alpha^2 x = \beta \operatorname{sen}(\omega t)$$

c) Equação da mola com segundo membro periódico, com atrito

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = \beta \operatorname{sen}(\omega t) \quad (\mu \geq 0).$$

RESPOSTAS - Parte B

(1) (a)

(1) $y(x) = x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$ (2) $y(x) = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2 x^2} + C_2$

(3) $y(x) = -\frac{x^2}{2} - C_1 x - C_1^2 \ln|x - C_1| + C_2$ (4) $y(x) = \frac{\ln^2|x|}{2} + C_1 \ln|x| + C_2$

(b)

(1) $y(x) = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x$ (2) $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

(3) $y^2 = C_1 x + C_2$ (4) $y = C_2(C_1 + y)e^x$

(2) : (1) $y_2 = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$ (3) $y_2 = C_1 x + C_2 e^x$ (5) $y_2 = C_1 + C_2 x^{-2}$ (7) $y^2 = C_1 e^x + C_2 e^x x^2$.

(3) : (1) $y(x) = C_1 x + C_2 x - \int x^{-2} e^{\int x \; f(x) dx} dx$ (2) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x \int e^{-2x + \int f(x) dx} dx$.

(5)

(1) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ (2) $y(x) = C_2 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

(3) $y(x) = C_1 e^x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x$ (4) $y(x) = e^x (C_1 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + C_2 \cos \sqrt{3}x)$

(5) $y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x}$ (6) $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x)$

(7) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$ (8) $y(x) = C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}x$

(9) $y(x) = C_1 + (C_2 + C_4 x)\cos x + (C_3 + C_5 x) \operatorname{sen} x$

(6)

(1) $y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x) + 1$ (2) $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$

(3) $y(x) = x^{-1}[C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x^3)]$ (4) $y(x) = C_1 x^{-1+\frac{\sqrt{10}}{2}} + C_2 x^{-1-\frac{\sqrt{10}}{2}}$

(5) $y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-4}$

(7)

(1) $y(x) = \frac{e^x}{6} + \frac{e^{2x}}{12} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

(2) $y(x) = -\frac{1}{50}\cos x - \frac{7}{50}\operatorname{sen} x + (\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{1}{125} + C_1)e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

(3) $y(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{x^3}{6} + (C_2 - \frac{1}{2}x)e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8} + C_1$

(4) $y(x) = -3e^{-x} - 2 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

(5) $y(x) = (\frac{1}{2}x + C_1)\operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 8x^2 - 16.$

(8)

a) $A + Bx^2 + x$ b) $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$

c) $y = A + B \operatorname{sen} x + C \cos x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{sen} x \ln|\cos x| - x \cos x$.

(9) (1) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} \ln x - \frac{3}{4}x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

(2) $y(x) = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

(3) $y(x) = \frac{1}{2}x e^{-x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \operatorname{sen} 2x$

(4) $y(x) = -3x^2 + 2x + 1 + C_1 + C_2 e^{2x}$

(5) $y(x) = x \operatorname{sen} x + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

(6) $y(x) = C_1 x + C_2(x^2+1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$

(7) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x^{-1} - x - \frac{x^2}{3}$

(8) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x$

(9) $y(x) = e^{-5x}(7x^2 + C_1 x + C_2)$

(10) $y(x) = e^{2x}(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} - \frac{1}{128} + C_1) + C_2 e^{-2x}$

(11) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3 \operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$

(12) $y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3 \operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$

(13) $y(x) = C_1 + C_2 x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + (C_3 + C_4 x)e^x$

(14) $y(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^3 - 5$

(15) $y(x) = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^x \operatorname{sen} x.$

(10)

(1) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2x}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(2) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)\ldots 4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)\ldots 5.4}$

(3) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$