MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2o. Semestre de 2013 - 2a. Lista de exercícios

1. Encontre o raio de convergência das seguintes séries de potências:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{2n!}{(n!)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{2n!}{(n!)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \frac{2n!}{(n!)^2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \frac{n!}{n^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} \frac{n!}{n^n}$.

2. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right) x^n$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}$, com $b > a > 0$.

3. Usando derivação e integração termo a termo, determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

   a) $\dfrac{1}{x^2+25}$ $b)$ $\mathrm{arctg}(2x)$ c) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ d) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$ e) $\dfrac{2x}{1+x^4}$

   f) $\ln(1+x)$ g) $\ln\left(\dfrac{1}{1+3x^2}\right)$ h) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ i) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^5}dx$ j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}dx$

4. Usando derivação e integração termo a termo, obter uma expressão das somas das séries abaixo e os respectivos raios de convergência.

   a) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + \cdots$

   b) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots$

   c) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$

   d) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots . + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$

   e) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$

   f) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$

   g) $x + 2x^3 + 3x^5 + \cdots + nx^{2n-1} + \cdots$

   h) $\dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^4}{3.4} - \dfrac{x^5}{4.5} + \cdots$

   i) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots$

   j) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + \cdots$

   k) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + \cdots$

   l) $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^8}{8} + \dfrac{x^{12}}{12} + \cdots$

5. Utilizando as somas das séries obtidas no exercício anterior, calcule:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$.

6. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$.

7. Verifique que $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$.

8. Utilizando o desenvolvimento em série, obtenha um valor aproximado de

   (a) e, com erro inferior a 10^{-5}
   (b) $\mathrm{sen}\, 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}
   (c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}
   (d) $\mathrm{arctg}(1/2)$ e $\mathrm{arctg}(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}
   (e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}

9. Utilizando série de Taylor calcule $\dfrac{d^{320}\operatorname{arctg}}{dx^{320}}(0)$ e $\dfrac{d^{321}\operatorname{arctg}}{dx^{321}}(0)$.

10. Dê a série de Taylor de $f(x)$ centrada no 0, indicando os intervalos de convergência

    a) $f(x) = x^2 e^x$ b) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

    d) $f(x) = \cos^2 x$ e) $f(x) = x\cos(2x)$ f) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

11. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência, e calcule $f(1)$ com erro inferior a 10^{-6}:

    a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ b) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

12. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^\alpha}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}$

13. Ache a série de Fourier das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

    a) $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x \le 0 \\ b, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \le 0 \\ bx, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

    c) $f(x) = |x|,\ -\pi < x \le \pi$ d) $f(x) = e^{ax},\ -\pi < x \le \pi,\ a \neq 0$

    e) $f(x) = \operatorname{sen}(ax),\ -\pi < x \le \pi,\ a \notin \mathbb{Z}$ f) $f(x) = ax + b,\ -\pi < x \le \pi$

    g) $f(x) = |\cos\ x|,\ -\pi < x \le \pi$

14. Ache a série de Fourier de senos e de cossenos das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

    a) $f(x) = ax,\ 0 \le x \le \pi$ b) $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le \pi$

    c) $f(x) = ax + b,\ 0 \le x \le \pi$ d) $f(x) = \operatorname{sen}\ x,\ 0 \le x \le \pi$

    e) $f(x) = |\cos\ x|,\ 0 \le x \le \pi$

15. Mostre que

    a) $1 = \dfrac{4}{\pi}(\operatorname{sen}\ x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\ 3x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}\ 5x + \cdots),\ 0 < x < \pi$;

    b) $\pi - x = 2(\operatorname{sen}\ x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\ 2x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\ 3x + \cdots),\ 0 < x < \pi;$

    c) $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4(-\cos\ x + \dfrac{\cos\ 2x}{2^2} - \dfrac{\cos\ 3x}{3^2} + \cdots),\ -\pi < x < \pi$

    d) $x(\pi - x) = \dfrac{\pi^2}{6} - (\cos\ 2x + \dfrac{\cos\ 4x}{2^2} + \dfrac{\cos\ 6x}{3^2} + \cdots),\ 0 < x < \pi$

    e) $x(\pi - x) = \dfrac{8}{\pi}(\operatorname{sen}\ x + \dfrac{\operatorname{sen}\ 3x}{3^3} + \dfrac{\operatorname{sen}\ 5x}{5^3} + \cdots),\ 0 < x < \pi$

16. Verifique as seguintes igualdades, usando o exercício anterior

    a) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{2n+1} + \cdots$ b) $\dfrac{\pi^2}{6} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$

    c) $\dfrac{\pi^3}{32} = \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ d) $\dfrac{3\pi^3}{128}\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \dfrac{1}{9^3} + \dfrac{1}{11^3} - \cdots$

    e) $\dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 1 + \dfrac{1}{3}\sqrt{2} - \dfrac{1}{5}\sqrt{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{7}\sqrt{2} + \dfrac{1}{9}\sqrt{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{11}\sqrt{2} - \dfrac{1}{13}\sqrt{2} - \cdots$

17. Calcule a soma das séries

    a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

18. Determine c_1, c_2, c_3 de modo que as integrais abaixo assumam o menor valor possível:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} [x - c_1 \operatorname{sen}\ x - c_2 \operatorname{sen}\ 2x - c_3 \operatorname{sen}\ 3x]^2 dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - c_1]^2 dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} [|\cos\ x| - c_1 - c_2 \operatorname{sen}\ x - c_3 \cos\ x]^2 dx$

19. Ache a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 1 e que satisfaz $f(x) = x^2$ se $0 \leq x < 1$. Qual a soma de série quando $x = 999/2$? E quando $x = 999$?

20. a) Obtenha a série de Fourier da função ímpar $f(x)$, periódica de período 4, e que satisfaz $f(x) = x$ se $0 \leq x \leq 1$ e $f(2 - x) = f(x)$ se $0 \leq x < 1$.

b) Encontre $b_1, b_2, b_3, ...$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = x$ se $0 < x < 1$.

c) Encontre $c_1, c_2, c_3, ...$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = 1 - x$ se $0 < x < 1$.

d) Quanto vale a soma de série do item c) quando $x = 200$? E quando $x = 201$?

21. Obtenha constantes a e b tais que a série de senos de $f(x) = x^3 + ax$ em $[0, \pi]$ seja da forma

$$b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

22. Usando a fórmula de Parseval prove que

(a) $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (b) $\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

23. Calcule

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

24. (a) Dê fórmulas para as constantes $a_n,\ \ n \geq 0,\ \ b_n,\ \ n \geq 1$, tais que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = x^2 \cdot e^x,\ -\pi < x < \pi$$

(b) Determine a soma da série para $x = \frac{11\pi}{2}$ e para $x = 11\pi$.

25. Encontre constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que minimizem a expressão

$$\int_0^{\pi} \left[x - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx\right)\right]^2 dx.$$