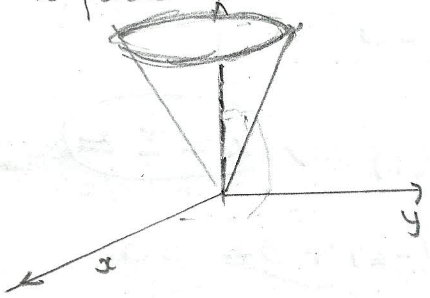
3. **(3,5 pontos)** Considere o conjunto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, z \geq 0 \text{ e } x - y + 4z \leq 12\}.$$

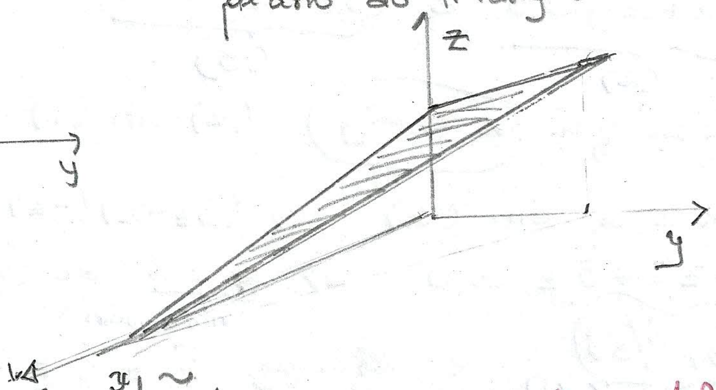
(a) Faça um esboço de K.

(b) Determine, se houver, o ponto de K mais próximo e o mais distante do ponto $P = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)$.

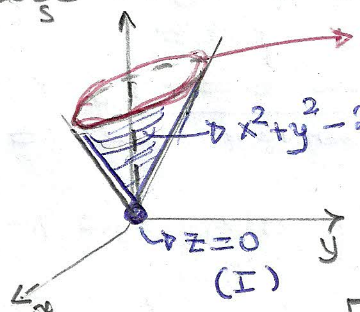
(a) A superfície $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-2z^2 = 0 \text{ e } z \geqslant 0\}$ é a parte do cone:



o plano $x-y+4z=12$ é o plano do triângulo abaixo



Um esboço de K é então:



(b) $d(P,(x,y,z)) = \sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z-2)^2}$

Queremos determinar o máx e o mín de $d(P,(x,y,z))$ com (x,y,z). Isso é o mesmo que determinar o máx e o mín de $F(x,y,z) = (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z-2)^2$ com $(x,y,z) \in K$.

Como K é compacto e F é contínua, o Teorema de Weierstrass garante a existência de máx e mín de F em K.

I: $z=0$ e $x^2+y^2=2z^2 \Rightarrow x=y=z=0$

Logo o vértice do cone $(0,0,0)$ é um candidato a ponto de máx ou de mín.

II: $x^2+y^2-2z^2=0$, $z>0$ e $x-y+4z<12$

$G(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2$

Por Lagrange, os candidatos a pontos de máx ou mín de F com $G(x,y,z)=0$ estão entre os pontos (x,y,z) com $\nabla F(x,y,z)$ e $\nabla G(x,y,z)$ vetores LD.

Assim, são as soluções do sistema:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & -2z \\ x-\frac{3}{2} & y+\frac{3}{2} & z-2 \end{vmatrix} = \vec{0}, \quad \underbrace{x^2+y^2-2z^2=0}_{(1)}, \text{ com } z>0 \text{ e } x-y+4z<12$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & -2z \\ x-\frac{3}{2} & y+\frac{3}{2} & z-2 \end{vmatrix} = \vec{0} \overset{L3-L2}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & -2z \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3z-2 \end{vmatrix} = \vec{0} \text{ de onde}$$

obtemos $\underbrace{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y=0}_{(2)}$ e $\underbrace{(3z-2)y+3z=0}_{(3)}$

De (2) tem-se que $x=-y$ (2) em (1) $\Rightarrow x=\pm z$

(a) $x=-y$ e $x=z$ em (3) $\Rightarrow (3z-2)(-z)+3z=0$

$\Rightarrow -3z^2+5z=0 \Rightarrow \underbrace{z=0}_{\text{não convém!}}$ ou $z=5/3$

$(5/3, -5/3, 5/3)$ $z>0$ e satisfaz $\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+4\cdot\frac{5}{3}=10<12$

$x \quad -y \quad +4z$

(b) $x=-y$ e $x=-z$ em (3)

$\Rightarrow (3z-2)z+3z=0 \Rightarrow \underbrace{z=0 \text{ ou } z=-1/3}_{\text{não servem pois } z>0}$.

III. $x^2+y^2-2z^2=0$ com $z>0$
$x-y+4z=12$

$H(x,y,z) = x-y+4z$

Nesse caso, os candidatos são aqueles $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $z>0$ tais que $\nabla F(x,y,z)$, $\nabla G(x,y,z)$ e $\nabla H(x,y,z)$ são LD.

Temos daí o sistema:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-3/2 & y+\frac{3}{2} & z-2 \\ x & y & -2z \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2+y^2-2z^2=0 \ (1) \text{ e } z>0 \\ x-y+4z=12 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-3/2 & y+\frac{3}{2} & z-2 \\ x & y & -2z \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \overset{L1-L2}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3z-2 \\ x & y & -2z \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{L1+\frac{3}{2}L3}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3z+4 \\ x & y & -2z \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (3z+4)(-x-y)=0$$

$\Longleftrightarrow \underbrace{z=-4/3}_{\text{não convém}}$ ou $\boxed{x=-y}$

$x = -y$ em (1) $\Rightarrow x = \pm z$

$x = z$ e $x = -y$ em (2) $\Rightarrow x + x + 4x = 12 \Rightarrow$
$6x = 12 \Rightarrow x = 2$

$(2, -2, 2)$

$x = -z$ .. e $x = -y$ em (2) $\Rightarrow x + x - 4x = 12 \Rightarrow x = -6$

$(-6, -6, 6)$

De (I), (II) e (III) temos

(x, y, z)	$F(x, y, z)$
$(0, 0, 0)$	$34/4$
$(5/3, -5/3, 5/3)$	$1/9$ → MAIS PRÓXIMO
$(2, -2, 2)$	$3/4$
$(-6, 6, 6)$	$\frac{113}{2}$ → MAIS DISTANTE