3. **(3,5 pontos)** Considere o conjunto

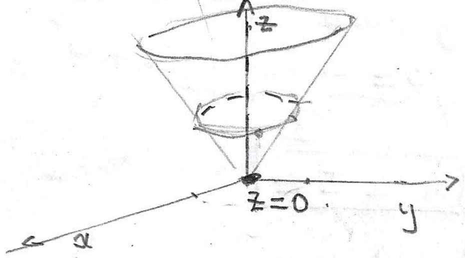
$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-2z^2=0, z\geq 0 \text{ e } -x+y+4z\leq 12\}.$$

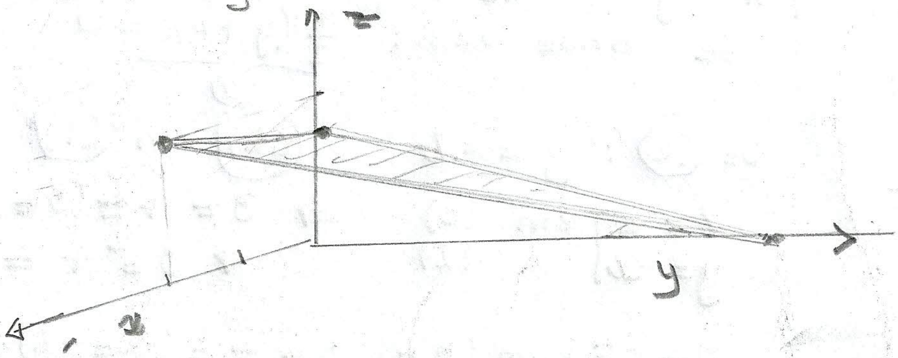
(a) Faça um esboço de K.

(b) Determine, se houver, o ponto de K mais próximo e o mais distante do ponto $P=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$.

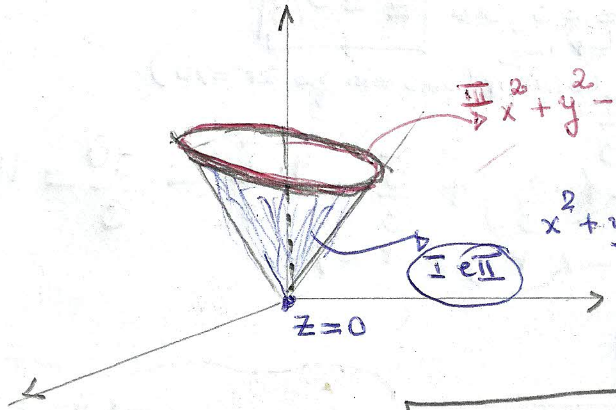
(a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-2z^2=0 \text{ e } z\geq 0\}$ é parte de um cone.

O plano $-x+4y+4z=12$ é o plano do triângulo abaixo





Então um esboço de K é



II $x^2+y^2-2z^2=0$ e $-x+y+4z=12$, $z>0$

$x^2+y^2-2z^2=0$ e $z\geq 0$, $-x+y+4z<12$.

(b) $d(P,(x,y,z))=\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2+(z-2)^2}$

Maximizar ou minimizar $d(P,(x,y,z))$ é o mesmo que maximizar ou minimizar $\boxed{F(x,y,z)=(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2+(z-2)^2}$

Como a função F é contínua e K é compacto, pelo Teorema de Weierstrass, F tem máximo e mínimo em K.

I: $z=0$ e $x^2+y^2-2z^2=0 \Rightarrow x=y=0$. Então o vértice $(0,0,0)$ do cone é um candidato.

II: $z>0$, $x^2+y^2-2z^2=0$ e $-x+y+4z<12$

Os candidatos a ponto de máximo e de mínimo são de $F(x,y,z) = (x+\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 + (z-2)^2$ satisfazendo $G(x,y,z) = 0$, com $G(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ são aqueles (x,y,z) tais que $\nabla F(x,y,z)$ e $\nabla G(x,y,z)$ são LD. Assim, são as soluções do sistema

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x+\frac{3}{2} & y-\frac{3}{2} & z-2 \\ x & y & -2z \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \text{e} \quad x^2+y^2-z^2 = 0 \ (1)$$

com $z>0$ e $-x+y+4z<12$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x+3/2 & y-3/2 & z-2 \\ x & y & -2z \end{vmatrix} = \vec{0} \overset{(L2-L3)}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3/2 & -3/2 & 3z-2 \\ x & y & -2z \end{vmatrix} = \vec{0},$$

de onde vem: $\underbrace{\frac{3}{2}(y+x)=0}_{(2)}$ e $\underbrace{3z-y(3z-2)=0}_{(3)}$

De (2): $y=-x$ (2) em (1) $\Rightarrow \boxed{x=\pm z}$

$\left.\begin{matrix} x=z \\ (2)\ y=-x \end{matrix}\right\}$ em (3) (2) $\Rightarrow 3z+z(3z-2)=0$
$\Rightarrow 3z^2+z=0 \Rightarrow \underbrace{z=0 \text{ ou } z=-\frac{1}{3}}$

nenhuma resposta serve pois $z>0$

$\left.\begin{matrix} x=-z \\ y=-x \end{matrix}\right\}$ em (3): $3z-z(3z-2)=0$
$3z-3z^2+2z=0$
$\Rightarrow z=0$ ou $\boxed{z=5/3}$

não convém (pois tem que ser $z>0$)

$z=5/3 \quad x=-\frac{5}{3} \quad y=\frac{5}{3}$

$(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3})$ satisfaz $\underbrace{-(-\frac{5}{3})+\frac{5}{3}+\frac{4\cdot5}{3}}_{(-x+y+4z)} = \frac{30}{3} = 10<12$

candidato: $(-5/3, 5/3, 5/3)$

III: $x^2+y^2-2z^2=0$
$-x+y+4z=12$ e $z>0$

$H(x,y,z) = -x+y+4z$

Os candidatos agora são aqueles $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $z>0$ tais que $\nabla F(x,y,z)$, $\nabla G(x,y,z)$ e $\nabla H(x,y,z)$ são LD.

Temos o sistema

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x+3/2 & y-3/2 & z-2 \\ x & y & -2z \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2+y^2-2z^2=0 \quad (1) \\ -x+y+4z=12 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x+\frac{3}{2} & x-\frac{3}{2} & z-2 \\ x & y & -2z \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \overset{L1-L2}{\iff} \begin{vmatrix} 3/2 & -3/2 & 3z-2 \\ x & y & -2z \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underset{L1+\frac{3}{2}L3}{\iff} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3z+4 \\ x & y & -2z \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff (3z+4)(x+y)=0$$

$$\iff \underbrace{z=-4/3}_{\text{não convém pois } z>0 \text{ por hipótese}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x=-y}$$

$x=-y$ em (1) $\Rightarrow z = \pm x$

$x=-y$ e $z=x$ em (2) $\Rightarrow -x-x+4x=12$

$x=6$

$\boxed{(6,-6,6)}$

$x=-y$ e $z=-x$ em (2)

$-x-x-4x = 12 \Rightarrow x=-2$

$\boxed{(-2,2,2)}$

De I, II e III temos:

candidato (x,y,z)	$F(x,y,z)$
$(0,0,0)$	$34/4$
$(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3})$	$1/6$
$(-2,2,2)$	$3/4$
$(6,-6,6)$	$\frac{113}{2}$

$\rightarrow \frac{9}{4}+\frac{9}{4}+4$

$\rightarrow \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}$ → mais próximo

$\rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\rightarrow \frac{81}{4}+\frac{81}{4}+16$

→ mais distante