2. **(3,5 pontos)** Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z - 6xy + 6xz = 1\}$$

e

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = 1\}.$$

(a) Determine a equação de um plano que seja tangente à superfície S_1 e que contenha o ponto $(0,0,0)$. Quantos planos assim existem? Por quê?

(b) Considere a curva C que é a intersecção de S_1 e S_2. Determine um ponto P em C tal que a reta tangente à curva C no ponto P seja paralela à reta

$$(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(0,5,7), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dê a equação da reta tangente à curva C no ponto P.

a) Seja $f(x,y,z) = y+z-6xy+6xz-1$. S_1 é a superfície do nível zero de f. Dado $(x_0,y_0,z_0) \in S_1$, o plano tangente à S_1 nesse ponto tem vetor normal $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (-6y_0+6z_0, 1-6x_0, 1+6x_0)$. Sua equação é: $(-6y_0+6z_0)(x-x_0) + (1-6x_0)(y-y_0) + (1+6x_0)(z-z_0) = 0$.
Para que $(0,0,0)$ esteja no plano, devemos ter $(-6y_0+6z_0)(-x_0) + (1-6x_0)(-y_0) + (1+6x_0)(-z_0) = 0$ (I). Como $(x_0,y_0,z_0) \in S_1$, temos também: $y_0+z_0-6x_0y_0+6x_0z_0 = 1$ (II).
De (I) + 2.(II) obtemos $y_0+z_0 = 2$ e, substituindo z_0 por $2-y_0$ em (II) obtemos $x_0 = \frac{1}{12}(y_0-1)$. O sistema formado pelas equações (I) e (II) tem infinitas soluções: os pontos da forma $(\frac{1}{12}(y_0-1), y_0, 2-y_0)$ para $y_0 \in \mathbb{R}, y_0 \neq 1$. Cada solução do sistema é um ponto de S_1 no qual o plano tangente à S_1 contém $(0,0,0)$. Portanto, há infinitos planos tangentes à S_1 contendo $(0,0,0)$. Um deles pode ser obtido fazendo $y_0=0$. O ponto de tangência é $(-1/12, 0, 2)$ e a equação do plano é

$$12(x + 1/12) + \frac{3}{2}(y) + \frac{1}{2}(z-2) = 0$$

b) Sejam $f(x,y,z) = y+z-6xy+6xz-1$ e $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2yz-1$. S_1 é a superfície do nível zero de f e S_2 é a superfície de nível zero de g. Num ponto $(x_0,y_0,z_0) \in S_1 \cap S_2$, a reta tangente à curva $S_1 \cap S_2$ é ortogonal à ambos os vetores $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (-6y_0+6z_0, 1-6x_0, 1+6x_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0,z_0) = (2x_0, 2y_0-2z_0, 2z_0-2y_0)$.

$(-6y_0+6z_0, 1-6x_0, 1+6x_0) \cdot (0,5,7) = 0 \iff x_0 = -1$

$(-6y_0+6z_0, 1-6x_0, 1+6x_0$ ~~[illegible]~~

(~~[illegible]~~ $) \cdot (0,5,7) = 0 \iff y_0 = z_0$

$(2x_0, 2y_0-2z_0, 2z_0-2y_0) \cdot (0,5,7) = 0$

$(-1, y_0, y_0) \in S_1 \iff y_0 = 1/2$. Logo, o ponto de tangência é $(-1, 1/2, 1/2)$ e a reta tangente tem equação:

$$(x,y,z) = (-1, 1/2, 1/2) + \lambda(0,5,7), \lambda \in \mathbb{R}.$$