2. **(3,5 pontos)** Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z - 6xy + 6yz = 1\}$$

e

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1\}.$$

(a) Determine a equação de um plano que seja tangente à superfície S_1 e que contenha o ponto $(0,0,0)$. Quantos planos assim existem? Por quê?

(b) Considere a curva C que é a intersecção de S_1 e S_2. Determine um ponto P em C tal que a reta tangente à curva C no ponto P seja paralela à reta

$$(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(5,0,7), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dê a equação da reta tangente à curva C no ponto P.

Observação: Os itens (a) e (b) são independentes.

a) Seja $f(x,y,z) = x+z-6xy+6yz-1$. S_1 é a superfície de nível zero de f. Dado $(x_0,y_0,z_0) \in S_1$, o plano tangente a S_1 nesse ponto tem vetor normal $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (1-6y_0, -6x_0+6z_0, 1+6y_0)$.
Sua equação é: $(1-6y_0)(x-x_0)+(-6x_0+6z_0)(y-y_0)+(1+6y_0)(z-z_0)=0$.
Para que $(x,y,z)=(0,0,0)$ esteja no plano, temos que ter
$(1-6y_0)(-x_0)+(-6x_0+6z_0)(-y_0)+(1+6y_0)(-z_0)=0$ (I). Como (x_0,y_0,z_0) está em S_1, temos também: $x_0+z_0-6x_0y_0+6y_0z_0=1$ (II).
O sistema abaixo tem infinitas soluções

$$(*) \begin{cases} -x_0-z_0+12x_0y_0-12y_0z_0=0 & \text{(I)} \\ x_0+z_0-6x_0y_0+6y_0z_0=1 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) + 2.(II) obtemos $x_0+z_0=2$. Substituindo em (II) obtemos $y_0 = \frac{1}{12(x_0-1)}$. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ com $x_0 \neq 1$, o ponto $(x_0, \frac{1}{12(x_0-1)}, 2-x_0)$ é um ponto de S_1 onde o plano tangente contém o ponto $(0,0,0)$.
Tomando $x_0=0$, temos um desses planos: $(0,-\frac{1}{12},2) \in S_1$ e o plano tangente nesse ponto é:

$$\frac{3}{2}x + 12\left(y+\frac{1}{12}\right) + \frac{1}{2}(z-2) = 0$$

b) Sejam $f(x,y,z)=x+z-6xy+6yz-1$ e $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xz-1$. S_1 é a superfície de nível zero de f e S_2 é a superfície de nível zero de g. Num ponto $(x_0,y_0,z_0) \in S_1 \cap S_2$, a reta tangente à curva $S_1 \cap S_2$ é ortogonal a ambos os vetores $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (1-6y_0, -6x_0+6z_0, 1+6y_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0,z_0) = (2x_0-2z_0, 2y_0, 2z_0-2x_0)$.

$(1-6y_0, -6x_0+6z_0, 1+6y_0)\cdot(5,0,7) = 0 \Leftrightarrow y_0 = -1$

$(2x_0-2z_0, 2y_0, 2z_0-2x_0)\cdot(5,0,7) = 0 \Leftrightarrow x_0 = z_0$

$(x_0, -1, x_0) \in S_1 \Leftrightarrow x_0 = 1/2$

Ponto de tangência: $(1/2, -1, 1/2)$

Reta tangente: $(x,y,z) = (1/2,-1,1/2) + \lambda(5,0,7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.