1. (3,0 pontos)

$$\text{Seja } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(2x+3y)}{2x^2+3y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Determine o valor de L para que f seja contínua em $(0,0)$.
2. Com o valor de L obtido em no item (a), calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Decida se f é ou não diferenciável em $(0,0)$. **JUSTIFIQUE!**

Solução

(a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, a função f é o produto das funções $g(x,y) = \dfrac{x^2}{2x^2+3y^2}$ e $h(x,y) = \operatorname{sen}(2x+3y)$.

Como $0 \leq x^2 \leq 2x^2 \leq 2x^2+3y^2$, temos que $0 \leq g(x,y) \leq 1$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Ou seja, g é limitada.

Também é fato que a função h é contínua e, portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(2x+3y) = \operatorname{sen}(0) = 0$.

Assim, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Para que f seja contínua, basta escolher $L = 0$.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2\operatorname{sen}(2h)}{2h^2} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)}{2h} = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

(c) Sabemos que f é diferenciável em $(0,0)$ se e somente se:

(i) existem as derivadas parciais de f em $(0,0)$ (já provado no item (b)), e

(ii) o limite $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{||(h,k)||}$ é igual a zero.

Vamos então verificar esta última condição.

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{||(h,k)||} = \\
= \quad &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^2 \operatorname{sen}(2h+3k)}{2h^2+3k^2} - 0 - 1\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\
= \quad &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \operatorname{sen}(2h+3k) - h(2h^2+3k^2)}{(2h^2+3k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \quad (*)
\end{aligned}$$

Vamos provar que o limite (*) não existe (e, consequentemente, f não é diferenciável em $(0,0)$):

De fato, escolhendo o caminho $(h,-h)$ e fazendo h tender a zero, o limite (*) fica:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(2h-3h) - h(2h^2+3h^2)}{(2h^2+3h^2)\sqrt{h^2+h^2}} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-h) - 5h}{5\sqrt{2h^2}} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h) - 5h}{h} \cdot \frac{h}{5\sqrt{2}|h|} = \frac{-6}{5\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|},
\end{aligned}$$

que não existe.