

1. (3,0 pontos)

$$\text{Seja } f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \operatorname{sen}(2x + 3y)}{2x^2 + 3y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ L, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Determine o valor de L para que f seja contínua em $(0, 0)$.
2. Com o valor de L obtido em no item (a), calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
3. Decida se f é ou não diferenciável em $(0, 0)$. **JUSTIFIQUE!**

Solução

- (a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$, a função f é o produto das funções $g(x, y) = \frac{y^2}{2x^2 + 3y^2}$ e $h(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$.

Como $0 \leq y^2 \leq 3y^2 \leq 2x^2 + 3y^2$, temos que $0 \leq g(x, y) \leq 1$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Ou seja, g é limitada.

Também é fato que a função h é contínua e, portanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{sen}(2x + 3y) = \operatorname{sen}(0) = 0$.

Assim, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Para que f seja contínua em $(0, 0)$, basta escolher $L = 0$.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k^2 \operatorname{sen}(3k)}{3k^2} - 0}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3k)}{3k} = 1 \end{aligned}$$

(c) Sabemos que f é diferenciável em $(0, 0)$ se e somente se:

(i) existem as derivadas parciais de f em $(0, 0)$ (já provado no item (b)), e

(ii) o limite $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\|(h, k)\|}$ é igual a zero.

Vamos então verificar esta última condição.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|} = \\
 &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{k^2 \operatorname{sen}(2h+3k)}{2h^2+3k^2} - 0 - 0 \cdot h - 1 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\
 &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^2 \operatorname{sen}(2h+3k) - k(2h^2+3k^2)}{(2h^2+3k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Vamos provar que esse limite não existe (e, conseqüentemente, f não é diferenciável em $(0,0)$):

De fato, escolhendo o caminho $(h, -h)$ e fazendo h tender a zero, o limite $(*)$ fica:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(2h-3h) + h(2h^2+3h^2)}{(2h^2+3h^2)\sqrt{h^2+h^2}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(-h) + 5h}{5\sqrt{2}h^2} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(h) + 5h}{h} \cdot \frac{h}{5\sqrt{2}|h|} = \frac{4}{5\sqrt{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{|h|},
 \end{aligned}$$

que não existe.