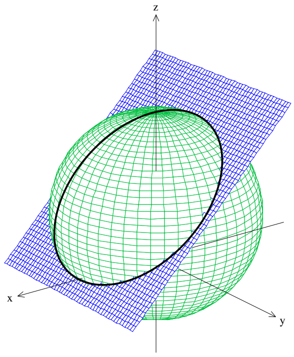
(3,0) **Questão 4.** Determine, caso existam, o ponto de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = 2z^2 - y^2 - x^2$ sobre o conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 5 \text{ e } y + z = 2\}$.



O conjunto D é fechado e limitado do $\mathbb{R}^3$, pois é um círculo contido no plano $y + z = 2$ delimitado pela esfera $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$ e a função f é contínua em D. Logo o teorema de Weierstrass garante que f tem ponto de máximo e de mínimo em D.

Determinemos então os candidatos.

Sejam $g(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 5$ e $h(x,y,z) = y + z - 2$. Observamos que f é uma função diferenciável e as funções g e h são de classe $\mathcal{C}^1$, pois são todas polinomiais.

I) Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f no plano $y + z = 2$ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{(-2x, -2y, 4z), (0,1,1)\} \text{ é l.d.} \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2x & -2y & 4z \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0) \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Como $0^2 + (4-1)^2 + (-2)^2 > 5$, temos que o ponto $(0,4,-2) \notin D$.

II) Seja γ a curva que é a intersecção do plano $y + z = 2$ com a esfera $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$.

Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f sobre γ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} -2x & -2y & 4z \\ 2x & 2(y-1) & 2z \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(3xz + x) = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0,2), (0,3,-1,) \text{ e } \left(\pm\tfrac{2\sqrt{7}}{3}, \tfrac{7}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) \text{ são soluções do sistema.}$$

Como $f(0,0,2) = 8$, $f(0,3,-1) = -7$ e $f(\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{75}{9} = -8,333$, obtemos que $(0,0,2)$ é o ponto de máximo e $(\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$ são os pontos de mínimo de f sobre D.