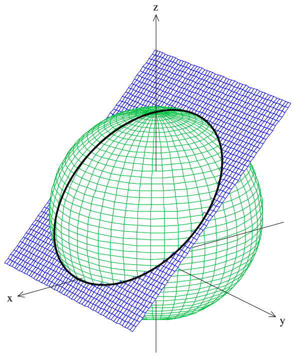
(3,0) **Questão 4.** Determine, caso existam, os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ sobre o conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 5 \text{ e } x + z = 2\}$.



O conjunto D é fechado e limitado do $\mathbb{R}^3$, pois é um círculo contido no plano $x + z = 2$ delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$ e a função f é contínua em D. Logo o teorema de Weierstrass garante que f tem ponto de máximo e de mínimo em D.

Determinemos então os candidatos.

Sejam $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 5$ e $h(x,y,z) = x + z - 2$. Observamos que f é uma função diferenciável e as funções g e h são de classe $\mathcal{C}^1$, pois são todas polinomiais.

I) Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f no plano $x + z = 2$ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{(4x, -2y, -2z), (1,0,1)\} \text{ é l.d.} \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4x & -2y & -2z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0) \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

Como $(-2)^2 + 0^2 + (4-1)^2 > 5$, temos que o ponto $(-2,0,4) \notin D$.

II) Seja γ a curva que é a intersecção do plano $x + z = 2$ com a esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.

Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f sobre γ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 4x & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2(z-1) \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(3xy + y) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2,0,0),\ (-1,0,3) \text{ e } \left(-\tfrac{1}{3}, \pm\tfrac{2\sqrt{7}}{3}, \tfrac{7}{3}\right) \text{ são soluções do sistema.}$$

Como $f(2,0,0) = 8$, $f(-1,0,3) = -7$ e $f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right) = -\frac{75}{9} = -8{,}333$, obtemos que $(2,0,0)$ é o ponto de máximo e $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right)$ são os pontos de mínimo de f sobre D.