Questão 3. Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$ e classifique-os, justificando, quanto a máximo local, mínimo local ou sela.

Inicialmente calculemos as derivadas parciais da f:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 6x + 6y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 6x - 6y,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 6,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 6\ \text{ e }\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6.$

Agora determinemos os pontos críticos da f,

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x + 6y = 0, \\ 4y^3 + 6x - 6y = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos, $4x^3 + 4y^3 = 0$, logo $y^3 = -x^3$, assim $y = -x$. Substituindo em qualquer equação acima temos que, $0 = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$, logo $x = 0$, dai $y = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, dai $y = \mp\sqrt{3}$. Então os pontos críticos da f são $(0,0)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Classifiquemos estes pontos quanto a máximo e mínimo locais:

A função hessiano da f é dada por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 6 & 6 \\ 6 & 12y^2 - 6 \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} 2x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 2y^2 - 1 \end{vmatrix} = 36\big[(2x^2 - 1)(2y^2 - 1) - 1\big],$$

então $H(0,0) = 0$ e $H(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = H(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 36.24 > 0$.

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 30 > 0$, então $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ são pontos de mínimo locais da f.

Como $H(0,0) = 0$, então nada podemos afirmar sobre este ponto utilizando este método da função hessiano.

Notemos que $f(x,y) = x^4 + y^4 - 3x^2 + 6xy - 3y^2 = x^4 + y^4 - 3(x-y)^2$ e $f(0,0) = 0$.

Por outro lado, $f(x,x) = 2x^4 \geq 0 = f(0,0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x,0) = x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3) \leq 0$ para todo $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Logo $(0,0)$ é ponto de sela!