Questão 3. Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ e classifique-os, justificando, quanto a máximo local, mínimo local ou sela.

Inicialmente calculemos as derivadas parciais da f:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4x - 4y$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4$.

Agora determinemos os pontos críticos da f,

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos, $4x^3 + 4y^3 = 0$, logo $y^3 = -x^3$, assim $y = -x$. Substituindo em qualquer equação acima temos que, $0 = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$, logo $x = 0$, dai $y = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$, dai $y = \mp\sqrt{2}$. Então os pontos críticos da f são $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Classifiquemos estes pontos quanto a máximo e mínimo locais:

A função hessiano da f é dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{vmatrix} = 16\big[(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 1\big],$$

então $H(0, 0) = 0$ e $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16.24 > 0$.

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$, então $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ são pontos de mínimo locais da f.

Como $H(0, 0) = 0$, então nada podemos afirmar sobre este ponto utilizando este método da função hessiano.

Notemos que $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ e $f(0, 0) = 0$.

Por outro lado, $f(x, x) = 2x^4 \geq 0 = f(0, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) \leq 0$ para todo $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Logo $(0, 0)$ é ponto de sela!