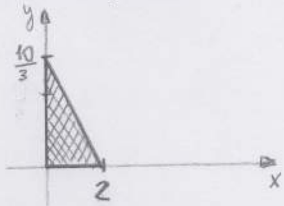
(2,5) **Questão 2.** Deseja-se encontrar os pontos de máximo e de mínimo de $f(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ sobre o conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0\}$.

a) O problema tem solução? Justifique.

b) Em caso afirmativo, determine tais pontos.

c) A função f acima tem ponto de máximo sobre o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x > 0, y > 0\}$? E de mínimo? Justifique suas respostas.



a) Sim, pois K é compacto (limitado e fechado) e f é contínua em K.

b) Os candidatos a máximo e mínimo de f em $\mathring{K}$ (interior de K) devem satisfazer $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja, $\left(\frac{1}{4}\frac{y^{3/4}}{x^{3/4}}, \frac{3}{4}\frac{x^{1/4}}{y^{1/4}}\right) = (0,0)$, o que não ocorre, portanto f não possui pontos críticos em $\mathring{K}$.

O bordo de K é composto dos segmentos $\gamma_1(t) = (t,0)$, $0 \leq t \leq 2$, $\gamma_2(t) = (0,t)$, $0 \leq t \leq 10/3$ e o segmento da reta $5x+3y=10$ entre os pontos $(2,0)$ e $(0,10/3)$. Este pode ser visto como restrição da curva de nível 0 da função $g(x,y) = 5x+3y-10$ ao primeiro quadrante.

Claramente $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in K$ e $f(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in \mathring{K}$.

Além disso, $f(\gamma_1(t)) = 0$, $\forall t \in [0,2]$ e $f(\gamma_2(t)) = 0$, $\forall t \in [0,10/3]$.

Sobre o segmento (aberto) da curva de nível da função g acima podemos usar os multiplicadores de Lagrange (os extremos dele estão na imagem de γ_1 e γ_2).

O sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} (y/x)^{3/4} & 3(x/y)^{1/4} \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5x \\ 5x + 3y = 10 \end{cases} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Assim $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ é o único ponto crítico de f sobre aquela restrição, sendo um ponto de máximo, pois nos extremos do segmento (demais candidatos), a função vale 0. Os pontos de mínimo são aqueles na imagem de γ_1 e γ_2.

c) O conjunto D é o conjunto K, exceto a imagem de γ_1 e γ_2 (onde f atingia seu mínimo). Assim, f assume máximo em D no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e não assume mínimo, pois $f(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in D$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.