(2,0) **Questão 1.** Seja S a superfície de equação $x^2 - 3xy + 8y + 2(z-1)^2 = 8$ e seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida em S, tal que $\gamma(1) = (1,1,0)$ e $\gamma'(1) \neq (0,0,0)$.

Considere ainda uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $\nabla g(1,1,0) = (2,-2,0)$.

Sabendo que $t_0 = 1$ é ponto de mínimo da função $\phi(t) = g(\gamma(t))$, determine uma equação para a reta tangente à trajetória (imagem) de γ em $\gamma(1)$.

Solução:

Observemos que a superfície S é a superfície de nível 8 da função de classe $\mathcal{C}^1$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 8y + 2(z-1)^2$.

Do fato de que a imagem de γ está contida em S resulta que $\nabla f(1,1,0)$ é ortogonal à S e, portanto, que $\nabla f(1,1,0) = (-1,5,-4)$ é um vetor ortogonal a $\gamma'(1)$.

De outro lado, por ser $t_o = 2$ ponto de mínimo da função diferenciável $\phi(t) = g(\gamma(t))$ em $\mathbb{R}$, resulta que $\phi'(1) = 0$. Logo, pela regra da cadeia, obtemos que $\nabla g(\gamma(1) \cdot \gamma'(1) = 0$, ou seja, $\nabla g(1,1,0) = (2,-2,0)$ é também ortogonal a $\gamma'(1)$.

Desde que os vetores $\nabla f(1,1,0) = (-1,5,-4)$ e $\nabla g(1,1,0) = (2,-2,0)$ formam uma conjunto linearmente independente e cada um deles é ortogonal a $\gamma'(1) \neq (0,0,0)$, podemos concluir que $\gamma'(1)$ é paralelo ao vetor $\nabla f(1,1,0) \wedge \nabla g(1,1,0) = (-8,-8,-8)$.

Portanto uma equação da reta tangente pedida é $(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.