3. **(2,5 pontos)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ tal que:

(i) A imagem da curva $\gamma : ]0, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\sec^2(t), \operatorname{cotg}(t))$ está contida em uma curva de nível de $f$.

(ii) A imagem da curva $\sigma : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(u) = \left(u^2 + 1, \sqrt[3]{u}, \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1\right)$ está contida no gráfico de $f$.

(a) Determine $\nabla f(2,1)$ justificando claramente o que está usando.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1)$, onde $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(c) Qual é a equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2, 1, f(2,1))$?

a) De (i), temos que $f(\gamma(t)) = C$, $\forall t \in ]0, \pi/2[$. Derivando em relação a $t$, obtemos: $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, $\forall t \in ]0, \pi/2[$. Ou seja, $\nabla f(\sec^2(t), \operatorname{cotg}(t)) \cdot (2\sec^2(t) \operatorname{tg} t, -\operatorname{cosec}^2(t)) = 0$, $\forall t \in ]0, \pi/2[$. Para $t = \pi/4$, obtemos:

$$\nabla f(2,1) \cdot (4, -2) = 0 \quad (\text{I})$$

De (ii), sabemos que $f(u^2+1, \sqrt[3]{u}) = \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1$ para todo $u \in ]0, +\infty[$. Derivando em relação a $u$, temos:

$$\nabla f(u^2+1, \sqrt[3]{u}) \cdot \left(2u, \frac{u^{-2/3}}{3}\right) = \frac{3u^2}{2} - \frac{u^{-2/3}}{6}, \forall u \in ]0, +\infty[.$$

Fazendo $u = 1$, obtemos:

$$\nabla f(2,1) \cdot (2, 1/3) = 4/3 \quad (\text{II})$$

Se $\nabla f(2,1) = (a, b)$, de (I) e (II) obtemos:

$$\begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ 2a + \frac{b}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a \\ b + \frac{b}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{array}{l} b = 1 \\ a = 1/2 \end{array}$$

Logo, $\nabla f(2,1) = (1/2, 1)$

b) Como $f$ é diferenciável, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \vec{u} =$
$= (1/2, 1) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{4}$

c) Fazendo $u = 1$ em (ii) temos que $\sigma(1) = (2, 1, 1) \in \operatorname{Graf}(f)$
Logo, $f(2,1) = 1$ e a equação do plano é

$$1/2\,(x-2) + 1.(y-1) - 1(z-1) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{x}{2} + y - z - 1 = 0$$