3. **(2,5 pontos)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que:

(i) A imagem da curva $\gamma :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\text{cotg}(t), \sec^2(t))$ está contida em uma curva de nível de f.

(ii) A imagem da curva $\sigma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(u) = \left(\sqrt[3]{u}, u^2 + 1, \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1 \right)$ está contida no gráfico de f.

(a) Determine $\nabla f(1,2)$ justificando claramente o que está usando.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2)$, onde $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(c) Qual é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1,2))$?

a) De (i), sabemos que $f(\gamma(t)) = c \ \forall t \in]0, \pi/2[$. Derivando em relação a t, temos: $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \forall t \in]0, \pi/2[$.
Ou seja, $\nabla f(\text{cotg}(t), \sec^2(t)) \cdot (-\text{cosec}^2(t), 2\sec^2(t)\,\text{tg}(t)) = 0$ $\forall t \in]0, \pi/2[$. Fazendo $t = \frac{\pi}{4}$, obtemos: $\nabla f(1,2) \cdot (-2, 4) = 0$ (I)

De (ii), sabemos que $f(\sqrt[3]{u}, u^2+1) = \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1$, $\forall u \in]0, +\infty[$
Derivando em relação a u, temos:
$\nabla f(\sqrt[3]{u}, u^2+1) \cdot \left(\frac{u^{-2/3}}{3}, 2u\right) = \frac{3u^2}{2} - \frac{u^{-2/3}}{6}$, $\forall u \in]0, +\infty[$.
fazendo $u = 1$, obtemos: $\nabla f(1,2) \cdot (1/3, 2) = 4/3$. (II)

Se $\nabla f(1,2) = (a, b)$, de (I) e (II) deduzimos que

$$\begin{cases} -2a + 4b = 0 \\ \frac{a}{3} + 2b = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ \frac{8b}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{matrix} a = 1 \\ b = 1/2 \end{matrix}$$

Logo, $\nabla f(1,2) = (1, 1/2)$

(b) Como f é diferenciável, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \vec{u} =$
$= (1, 1/2) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = 1/2 + \sqrt{3}/4 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

(c) Fazendo $u = 1$ em (ii), temos: $\sigma(1) = (1, 2, 1)$.
Como $\text{Im}(\sigma) \subset \text{Graf}(f)$, $f(1,2) = 1$.
Logo, a equação do plano pedido é
$1 \cdot (x - 1) + \frac{1}{2}(y - 2) - 1(z - 1) = 0$, ou seja,
$$x + \frac{y}{2} - z - 1 = 0$$