1. **(2,5 pontos)** Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{3x^4 + 2y^4}$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique se a função $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é ou não contínua em $(0,0)$.
   (Justifique todas as passagens.)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{3}(3x^4+2y^4)^{-2/3} \cdot 12x^3$ se $3x^4+2y^4 \neq 0$,

isto é, se $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{3x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{3}\, x^{1/3} = 0.$$

Assim
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) Para verificar se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$

precisamos verificar se
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4\sqrt[3]{\frac{x^9}{(3x^4+2y^4)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{3x^4+2y^4}\right)^2 x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$\left(\frac{x^4}{3x^4+2y^4}\right)^2$ limitada (*), $x \to 0$

(*) $0 \le x^4 \le 3x^4 + 2y^4 \Rightarrow 0 \le \dfrac{x^4}{3x^4+2y^4} \le 1 \;\forall (x,y) \neq (0,0)$

Portanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.