

Questão 3. (3,0)

a) Decida, justificando, se existe ou não $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(5x^2 + y^2)$.

b) Seja f a função dada por

$$f(x, y) = x^2 \ln(5x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \right).$$

Verifique se os limites abaixo existem e, em caso afirmativo, determine seu valor. Justifique.

b.1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$; **b.2)** $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$.

Solução.

a) Para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ em \mathbb{R}^2 temos

$$x^2 \ln(5x^2 + y^2) = \frac{x^2}{5x^2 + y^2} (5x^2 + y^2) \ln(5x^2 + y^2).$$

O fator $\frac{x^2}{5x^2 + y^2}$ é limitado, pois $0 < x^2 < 5x^2 + y^2$ e então $0 < \frac{x^2}{5x^2 + y^2} < 1$ (tente encontrar um limitante superior menor).

A função $u(x, y) = 5x^2 + y^2$ é contínua e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = 0$. Como a função \ln é contínua temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (5x^2 + y^2) \ln(5x^2 + y^2) = \lim_{u \rightarrow 0} u \ln u.$$

Sendo este último limite uma indeterminação do tipo " $0 \cdot (-\infty)$ ", podemos aplicar a regra de L'Hospital obtendo

$$\lim_{u \rightarrow 0} u \ln u = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} -u = 0.$$

Com isso temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(5x^2 + y^2) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{5x^2 + y^2}}_{\text{limitado}} \underbrace{(5x^2 + y^2) \ln(5x^2 + y^2)}_{\rightarrow 0} = 0.$$

b) Sendo $g(x, y) = x^2 \ln(5x^2 + y^2)$, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad g(1, 1) = \ln 6.$$

b.1) Como $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(t) < \frac{\pi}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{g(x, y)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \right)}_{\text{limitado}} = 0.$$

b.2) Lembrando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(t) = -\frac{\pi}{2}$, consideramos as curvas contínuas $\gamma_1(t) = (1, t)$, com $t \leq 1$ e $\gamma_2(t) = (1, t)$, com $t \geq 1$. Obtemos então

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(5 + t^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1 - t^2} \right) = \frac{\pi \ln 6}{2}.$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \ln(5 + t^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1 - t^2} \right) = -\frac{\pi \ln 6}{2}.$$

Portanto não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$.