Questão 3. (3,0)

a) Decida, justificando, se existe ou não $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2)$.

b) Seja f a função dada por

$$f(x,y) = x^2\ln(3x^2+y^2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right).$$

Verifique se os limites abaixo existem e, em caso afirmativo, determine seu valor. Justifique.

b.1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; **b.2)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

Solução.

a) Para todo $(x,y)\neq(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$ temos

$$x^2\ln(3x^2+y^2) = \frac{x^2}{3x^2+y^2}(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2).$$

O fator $\dfrac{x^2}{3x^2+y^2}$ é limitado, pois $0<x^2<3x^2+y^2$ e então $0<\dfrac{x^2}{3x^2+y^2}<1$ (tente encontrar um limitante superior menor).

A função $u(x,y)=3x^2+y^2$ é contínua e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=0$. Como a função ln é contínua temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2) = \lim_{u\to0} u\ln u.$$

Sendo este último limite uma indeterminação do tipo “$0\cdot(-\infty)$”, podemos aplicar a regra de L’Hospital obtendo

$$\lim_{u\to0} u\ln u = \lim_{u\to0}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u\to0} -u = 0.$$

Com isso temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{3x^2+y^2}}_{\text{limitado}}\underbrace{(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)}_{\to0} = 0.$$

b) Sendo $g(x,y)=x^2\ln(3x^2+y^2)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0 \qquad \text{e} \qquad g(1,1)=\ln4.$$

b.1) Como $-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}(t)<\dfrac{\pi}{2}$ para todo $t\in\mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{g(x,y)}_{\to0}\underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)}_{\text{limitado}} = 0.$$

b.2) Lembrando que $\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{arctg}(t)=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{t\to-\infty}\operatorname{arctg}(t)=-\dfrac{\pi}{2}$, consideramos as curvas contínuas $\gamma_1(t)=(1,t)$, com $t\le1$ e $\gamma_2(t)=(1,t)$, com $t\ge1$. Obtemos então

$$\lim_{t\to1^-} f\big(\gamma_1(t)\big) = \lim_{t\to1^-}\ln(3+t^2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = -\frac{\pi\ln4}{2}.$$

$$\lim_{t\to1^+} f\big(\gamma_2(t)\big) = \lim_{t\to1^+}\ln(3+t^2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\pi\ln4}{2}.$$

Portanto não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.