

(4,0) **Questão 2.** Considere a esfera $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ e a parte do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ com $z \geq 0$. Seja C a curva dada pela intersecção destas superfícies.

- Determine uma parametrização para a curva C , explicitando o seu domínio.
- Escreva a equação da reta tangente à curva no ponto $P = (1, 0, 1)$.
- Determine os pontos sobre a curva C mais distantes da origem.

Solução.

- a) Podemos isolar $z^2 = x^2 + y^2$ na equação do cone e substituir na equação da esfera, obtendo $x^2 - x + y^2 = 0$, que é uma equação que envolve apenas as variáveis x e y . Esta última equação é equivalente a

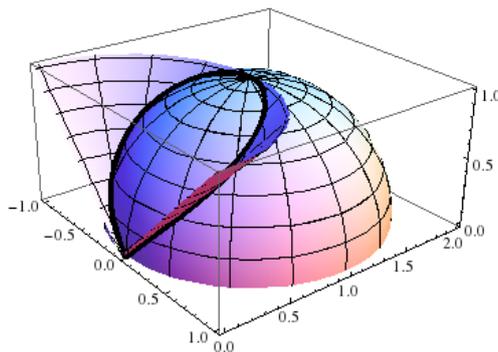
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Podemos escolher $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t$, $y(t) = \frac{1}{2} \sin t$, e, substituindo na equação do cone, obtemos

$$z^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t. \text{ Como } z \geq 0, \text{ temos } z(t) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t}.$$

Portanto, uma possível parametrização é

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t}\right), t \in [-\pi, \pi]$$



- b) Observamos que $P = (1, 0, 1) = \gamma(0)$. Portanto, o vetor tangente à curva em P será dado por $\gamma'(0)$.

Como $\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t, \frac{-\sqrt{2} \sin t}{4\sqrt{1 + \cos t}}\right)$, o vetor tangente é $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Assim, uma equação para a reta tangente é

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0), \lambda \in \mathbf{R}$$

- c) A distância entre a origem e um ponto qualquer $\gamma(t)$ da curva é dada por

$$d(t) = \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t\right]^2 + \left[\frac{1}{2} \sin t\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2} = \sqrt{1 + \cos t}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, o valor máximo da função d será obtido para o valor de t que torna máximo o valor de $1 + \cos t$, a saber, $t = 0$. Assim, o ponto da curva mais distante da origem é $\gamma(0) = (1, 0, 1)$.