(4,0) **Questão 2.** Considere a esfera $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ e a parte do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ com $z \geq 0$. Seja C a curva dada pela intersecção destas superfícies.

a) Determine uma parametrização para a curva C, explicitando o seu domínio.

b) Escreva a equação da reta tangente à curva no ponto $P = (0,1,1)$.

c) Determine os pontos sobre a curva C mais distantes da origem.

Solução.

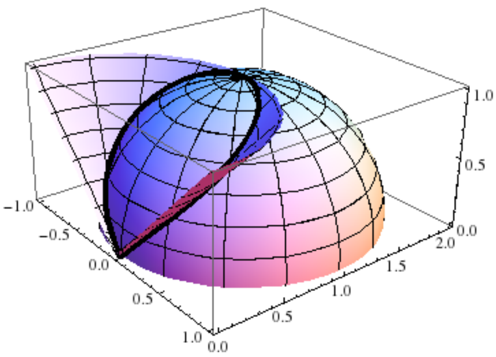
a) Podemos isolar $z^2 = x^2 + y^2$ na equação do cone e substituir na equação da esfera, obtendo $x^2 + y^2 - y = 0$, que é uma equação que envolve apenas as variáveis x e y. Esta última equação é equivalente a

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Podemos escolher $x(t) = \dfrac{1}{2}\cos t$, $\;y(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$ e, substituindo na equação do cone, obtemos $z^2(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$. Como $z \geq 0$, temos $z(t) = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t}$.

Portanto, <u>uma</u> possível parametrização é

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t}\right), t \in [0, 2\pi]$$



b) Observamos que $P = (0,1,1) = \gamma\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Portanto, o vetor tangente à curva em P será dado por $\gamma'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Como $\gamma'(t) = \left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, \dfrac{1}{2}\cos t, \dfrac{\sqrt{2}\cos t}{4\sqrt{1+\operatorname{sen} t}}\right)$, o vetor tangente é $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

Assim, uma equação para a reta tangente é

$$(x, y, z) = (0,1,1) + \lambda(-1,0,0), \lambda \in \mathbf{R}$$

c) A distância entre a origem e um ponto qualquer $\gamma(t)$ da curva é dada por

$$d(t) = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\cos t\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sen} t}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, o valor máximo da função d será obtido para o valor de t que torna máximo o valor de $1 + \operatorname{sen} t$, a saber, $t = \dfrac{\pi}{2}$. Assim, o ponto da curva mais distante da origem é $\gamma\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0,1,1)$.