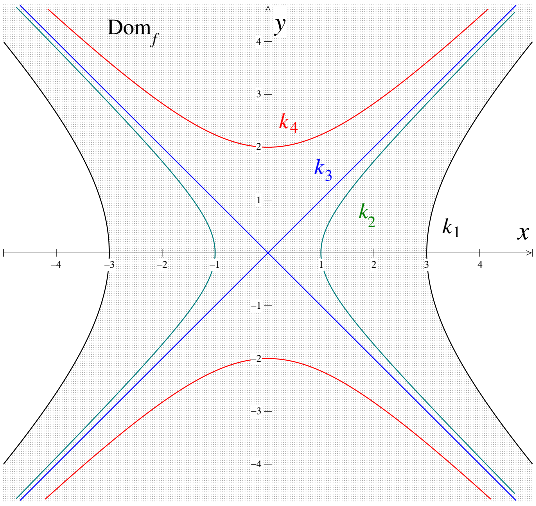
Questão 1. (3,0) Seja $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 9}$. Utilizando o sistema de coordenadas abaixo:

a) determine e represente o domínio máximo da função f;

b) determine equações para as curvas de nível k de f para $k = 0$, $k = \sqrt{8}$, $k = 3$ e $k = \sqrt{13}$. Faça o esboço dessas curvas.



a) $\text{Dom}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 + 9 \geq 0\}$.

$y^2 - x^2 + 9 \geq 0 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 \geq -9 \;\Rightarrow\; \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1 \;\Rightarrow$ o domínio de f é a região do plano compreendida entre as componentes da hipérbole $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$.

b) $\sqrt{y^2 - x^2 + 9} = k \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 + 9 = k^2 \;\Rightarrow\; \boxed{y^2 - x^2 = k^2 - 9}$.

i) $(k_1 = 0) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (0)^2 - 9 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = 9 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1}$ (hipérbole - que é o bordo do domínio de f).

ii) $(k_2 = \sqrt{8}) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (\sqrt{8})^2 - 9 \;\Rightarrow y^2 - x^2 = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2 - y^2 = 1}$. (hipérbole)

iii) $(k_3 = 3) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (3)^2 - 9 \;\Rightarrow\; \boxed{y^2 - x^2 = 0} \;\Rightarrow\; (y + x)(y - x) = 0$. (par de retas concorrentes $y = -$ e $y = x$)

iv) $(k_4 = \sqrt{13}) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (\sqrt{13})^2 - 9 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1}$. (hipérbole)